

Suport didactic pentru disciplina Algoritmi numerici

Rezolvarea ecuatiilor algebrice neliniare – studiu de caz + tema

Gabriela Ciuprina

2017

In acest document se analizeaza cel mai simplu exemplu de test posibil pentru un microcomutator de RF - modelul 1D al unui condensator plan paralel, cu armaturile orizontale, armatura inferioara fiind fixata, iar cea superioara fiind suspendata de un punct fix prin intermediul unui resort. Sunt parcursi si explicati in detaliu toti pasii unei modelari. Regimul considerat este static: structural (elastostatic) cuplat cu electrostatic. Din punct de vedere matematic, problema se reduce la rezolvarea unei sistem de ecuatii algebrice neliniare. Rezolvarea numerica se poate face in doua moduri: folosind un cuplaj tare si folosind un cuplaj slab. Pentru fiecare din abordari exista mai multe variante de implementare. Unele sunt explicate si detaliate in acest studiu de caz, altele va sunt propuse ca tema.

Cuprins

1	Introducere.....	4
2	Modelarea conceptuala.....	4
2.1	Descrierea obiectului modelat (modelare geometrica).....	4
2.2	Principiul de functionare - pe scurt (modelare fizica).....	5
2.3	Sistem de referinta general (modelare geometrica).....	5
2.4	Ipoteze simplificatoare (modelare fizica).....	6
2.5	Domeniul de calcul spatial (modelare geometrica si modelare fizica).....	6
2.6	Modelarea (multi)fizica. Regimuri posibile.....	7
3	Modelarea multifizica in regim static.....	7
3.1	Relatiile cauzale intre marimile fizice. Descriere calitativa.....	8
3.2	Relatiile intre marimile fizice in domeniul MEC.....	9
3.3	Relatiile intre marimile fizice in domeniul ES.....	10
3.3.1	Microcomutator rezistiv.....	10
3.3.2	Microcomutator capacitiv.....	12
4	Modelarea matematica in regim static.....	13
4.1	Ce se da?.....	14
4.1.1	Geometria domeniului de calcul.....	14
4.1.2	Materiale.....	14
4.1.3	Surse interne de camp.....	14
4.1.4	Conditii de frontiera.....	14
4.1.5	Conditii initiale.....	15
4.2	Ce se cere?.....	15
4.3	Relatiile dintre date si rezultate.....	15
5	Modelarea analitica in regim static.....	17
5.1	Cazul rezistiv.....	17
5.2	Cazul capacitiv.....	21
6	Modelarea numerica in regim static.....	28
6.1	Cuplaj tare.....	29
6.2	Cuplaj slab.....	29
7	Verificarea si validarea modelului static.....	30
	Suport didactic pentru disciplina <i>Algorimi numerici</i>	2

7.1	Cuplaj tare	30
7.2	Cuplaj slab.....	30
8	Concluzii.....	30
9	Tema	31
10	Referinte.....	31
11	Anexe	32
11.1	Cod Matlab: Dependenta functiei neliniare frez de distanta dintre armaturi, pentru diferite valori ale tensiunii aplicate	32
11.2	Cod Matlab: curba gap-tensiune	33
11.3	Cod Matlab: reprezentarea grafica a functiei neliniare - rezistiv vs capacitiv	34

1 Introducere

Scopul acestui document este ilustrarea rezolvarii numerice a unei ecuatii algebrice neliniare. Problema aleasa este inspirata de modelarea celei mai simple probleme de test care se poate imagina in categoria microcomutatoarelor de radio-frecventa (RF) actionate electrostatic (ES).

Reaminitim pe scurt etapele unei modelari [Ioan12]:

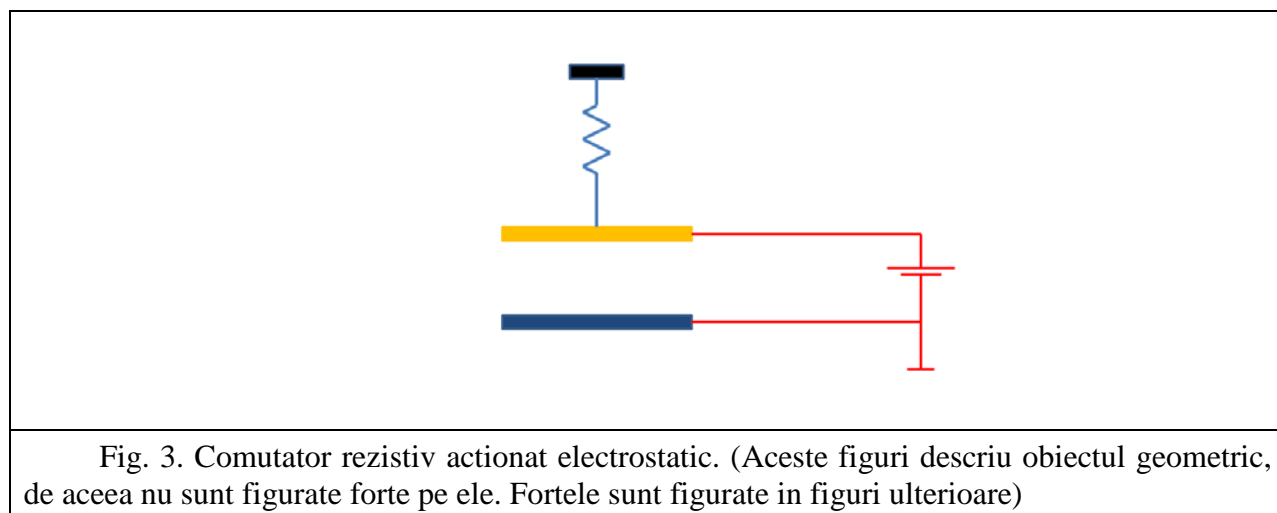
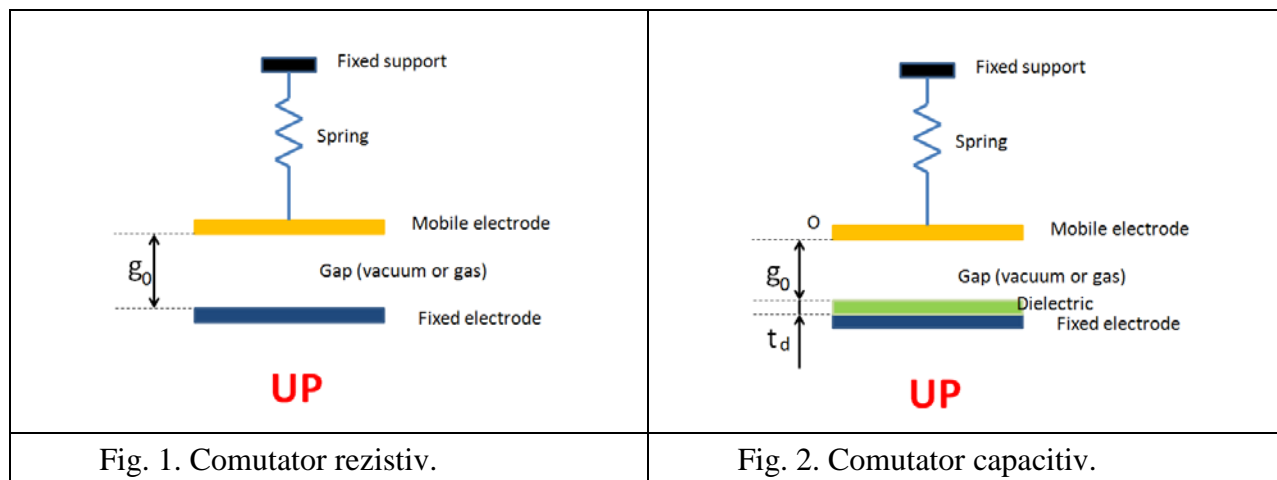
- **Modelarea conceptuală:** se stabilesc ipotezele simplificatoare și aspectele neglijate;
- **Modelarea matematică:** se formulează modelul in limbaj matematic, sub forma unei probleme bine formulate.
- **Modelarea analitic-aproximativă:** se determina relațiile între mărimile de intrare și cele de ieșire, in formă analitică, rezolvând o variantă aproximativă a ecuațiilor modelului.
- **Modelarea numerică:** se construiește un algoritm dedicat rezolvării ecuațiilor modelului.
- **Verificarea și validarea modelului:** se implementează algoritmul de rezolvare numerică pe un sistem de calcul și se realizează o serie de simulări, ale căror rezultate sunt folosite pentru a valida modelul elaborat.

2 Modelarea conceptuala

Modelarea conceptuală este prima etapă a modelarii și ea constă in stabilirea modelului geometric și a celui (multi)fizic. Elaborarea modelului geometric necesita intelegerea perfecta a structurii obiectului modelat, iar elaborarea modelului fizic necesita intelegerea principiului de functionare. In modelarea conceptuala aspectele de modelare geometrica nu pot fi total decuplate de aspectele de modelare fizica, dupa cum se va vedea in cele ce urmeaza.

2.1 Descrierea obiectului modelat (modelare geometrica)

Un condensator plan paralel are armaturile (conductoare si rigide) plasate orizontal, armatura de jos fiind fixata, iar armatura de sus fiind prinsa de un suport fix prin intermediul unui resort elastic (Fig. 1). Dispozitivul se afla in vid (sau intr-un gaz). Suplimentar, pe armatura de jos poate fi depus un strat subtire de dielectric (Fig. 2). Intre cele doua armaturi se aplica o tensiune electrica (Fig. 3).



2.2 Principiul de functionare - pe scurt (modelare fizica)

La aplicarea unei tensiuni între armătura mobilă și cea fixă (actionare electrostatica - Fig. 3) se produce o forță electrica care deplasează elastic zonă armăturii mobile până la stabilirea contactului mecanic dintre cele doua armaturi; la anularea tensiunii electrice sistemul revine în poziția inițială din cauza forțelor elastice din resort.

2.3 Sistem de referinta general (modelare geometrica)

Pentru descrierea datelor geometrice vom folosi un sistem de referinta cartezian drept. Axa Oz este verticala (perpendiculara pe armaturi) are originea plasata pe planul corespunzator fetei inferioare a armaturii superioare, in pozitia ce corespunde starii neactionate, iar valorile pozitive ale axei Oz sunt sub acest plan. Sistemul de referință este fix, nu se deplasează odată cu armătura mobilă.

Axele Ox si Oy sunt plasate astfel incat pozitia initiala a armaturii mobile sa fie descrisa de un paralelipiped de coordonate x si y pozitive, unul din colturi avand $x=0$ si $y = 0$.

Din considerente legate de ipoteze asupra modelului fizic, s-ar putea ca unele din axele de coordonate sa nu fie relevante si sa fie utila doar reprezentarea a doua din ele (de exemplu xOz ca in Fig. 4 stanga) sau chiar a uneia singura (de exemplu Oz - ca in Fig. 4 dreapta).

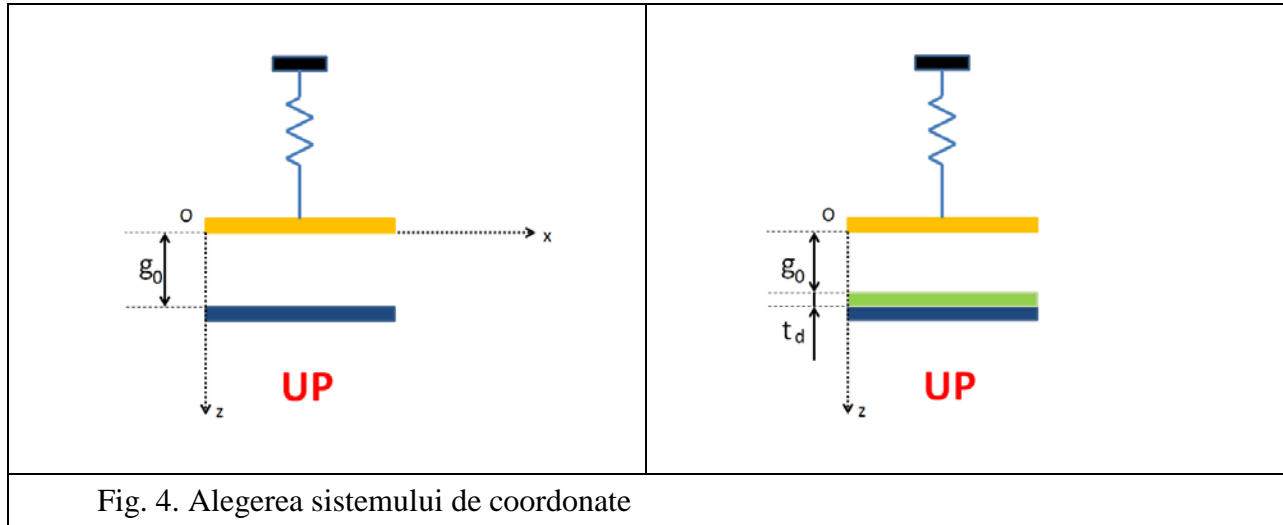


Fig. 4. Alegerea sistemului de coordonate

2.4 Ipoteze simplificatoare (modelare fizica)

Cea mai importanta ipoteza este modul in care presupunem ca depind marimile caracteristice locale (date si necunoscute) de coordonate. Stabilirea acestei ipoteze nu se poate face numai pe considerente exclusiv geometrice. De exemplu pentru descrierea geometrica a armaturilor avem nevoie de doua coordonate (problema este plan paralela), marcate x si z in Fig. 4 stanga, dar daca vom considera campul dintre ele plan paralel, atunci acesta depinde de o singura coordonata, coordonata z in Fig. 4 dreapta.

Vom presupune ca miscarea armaturii mobile se face numai dupa directia Oz , deci din punct de vedere mecanic modelul este 1D. Campul electrostatic care apare intre armaturile condensatorului va fi presupus uniform, astfel incat el va depinde numai de distanta dintre armaturi, deci numai de coordonata z . Deci si modelul electrostatic va fi 1D.

Pentru a studia efectul de capat al condensatorului, s-ar putea rafina acest model cu MEC1D+ES2D (caz in care pentru problema de camp electric este necesara reprezentarea a doua axe de coordonate ca in Fig. 4 - dreapta) sau MEC1D+ES3D. Rafinarile ulterioare care ar putea avea sens sunt MEC2D+ES2D si MEC3D+ES3D.

Toate formele geometrice se considera ideale, nu se ia in considerare rugozitatea suprafetelor.

Modelul analizat in cele ce urmeaza va fi **MEC1D+ES1D** si singura axa necesara a fi desenata este axa Oz (Fig. 4 - dreapta).

2.5 Domeniul de calcul spatial (modelare geometrica si modelare fizica)

Pentru analiza structurala vom presupune ca armatura mobila poate fi asimilata unui punct material concentrat in centrul ei de greutate. Domeniul structural este de dimensiune 0.

Pentru analiza electrostatica, domeniul este bidimensional, problema fiind presupusa a fi plan paralela si neglijandu-se efectele de capat. Forma domeniului este un dreptunghi de dimensiune lungimea unei armaturi x distanta dintre armaturi. Deoarece campul electric este presupus uniform, domeniul din analiza electrostatica ar putea fi considerat 1D, de forma unui segment vertical de lungime egala cu distanta dintre armaturi, avand drept capete centrele de greutate ale celor doua armaturi.

2.6 Modelarea (multi)fizica. Regimuri posibile.

Obiectivul principal al etapei de modelare fizică constă în identificarea regimurilor fiecărui câmp fizic, sursele acestor câmpuri, cu evidențierea relațiilor de cuplaj, adică trecerea de la o înțelegere calitativă, fenomenologică, spre una cantitativă. Modul în care mărimile variază în timp - determina regimul de funcționare. Tipurile posibile sunt

- **Staționar**, în care mărimile nu depind de timp (sau se neglijează efectele acestei dependențe); În particular un regim staționar poate fi **static** dacă nu există transferuri energetice (electrostatic/elastostatic).
- **Tranzitoriu**, în care mărimile au o variație neprecizată în timp, pe intervalul de interes $(0, t_{max})$.
- **Analiza modală**, în care se caută modurile proprii de oscilație, care pot apărea în unele structuri după anularea excitațiilor.

Descrierea marimilor fizice ce descriu starea și interacțiunile depind de regimul de funcționare. În cele ce urmează vom face doar analiza în regim staționar (chiar static).

3 Modelarea multifizica in regim static

În acest regim se neglijează dependența de timp a marimilor, și vom presupune că nu există transferuri energetice (electrostatic/elastostatic), adică armatura superioară este într-o poziție de echilibru, este imobilă.

Marimi fizice ce descriu starea câmpurilor și a corpurilor aflate în aceste câmpuri statice precum și interacțiunile sunt prezentate în tabelul de mai jos.

În analiza structurală deplasările se consideră sumă dintre deplasările de corp rigid și cele elastice. Deplasările de corp rigid (3 translații și 3 rotații) se raportează la un singur punct din solid, să spunem G, restul deplasărilor sunt mărimi locale în accepțiunea de mai jos).

	Marimi locale	Marimi globale
Campului electrostatic	E - intensitatea campului electric [V/m]	u - tensiunea electrica [V]
	D - inductia electrica [C/m ²]	ψ- fluxul electric [C]
Corpurilor aflate in camp electrostatic	ρ - densitatea de sarcina electrica [C/m ³]	q - sarcina electrica [C]
	P - polarizatia electrica [C/m ²]	p - momentul electric [Cm]
Interactiuni de natura electrica	f_e - densitatea de forta [N/m ³]	F_e - forta electrica [N]

Campuri de eforturi	f_e - densitatea de forta [N/m^3]	F_e - forta electrica [N]
	Pentru un element discret nu exista marime locală, se poate defini o forță distribuită pe o linie la bare p_l [N/m]	F_k - forta elastica [N]
	p_v - forțe de inerție (volum) [N/m^3]	G - forta de greutate [N]
Deformarea corpurilor aflate in campuri de eforturi	z - deplasarea unui punct din corp [m]	deplasarea centrului de greutate [m]

3.1 Relatiile cauzale intre marimile fizice. Descriere calitativa.

Inainte de aplicarea unei tensiuni intre armaturi, asupra armaturii superioare actioneaza greutatea proprie, care este anulata de forta elastica din resort, astfel incat armatura superioara se afla in repaus, la o distanta notata cu g_0 , de armatura inferioara, fixata.

Dupa aplicarea unei tensiuni electrice constante V intre armaturi, apare o forta suplimentara, de natura electrica, de atractie intre armaturi. Aceasta conduce la deplasarea armaturii mobile, sistemul ajunge intr-o alta stare de echilibru intre cele trei forte: elastica, de greutate, electrica. Aceste relatii cauzale sunt ilustrate in Fig. 5. Marimile a caror valori sunt independente de intregul sistem sunt forta de greutate si tensiunea electrica aplicata. Valoarea fortei elastice rezulta in urma stabilirii echilibrului interior al sistemului alcatuit din armatura si resort, iar valoarea fortei electrice rezulta din valoarea campului ce se stabileste intre armaturi, camp ce depinde de tensiunea aplicata si de configuratia geometrica la care se atinge echilibrul static.

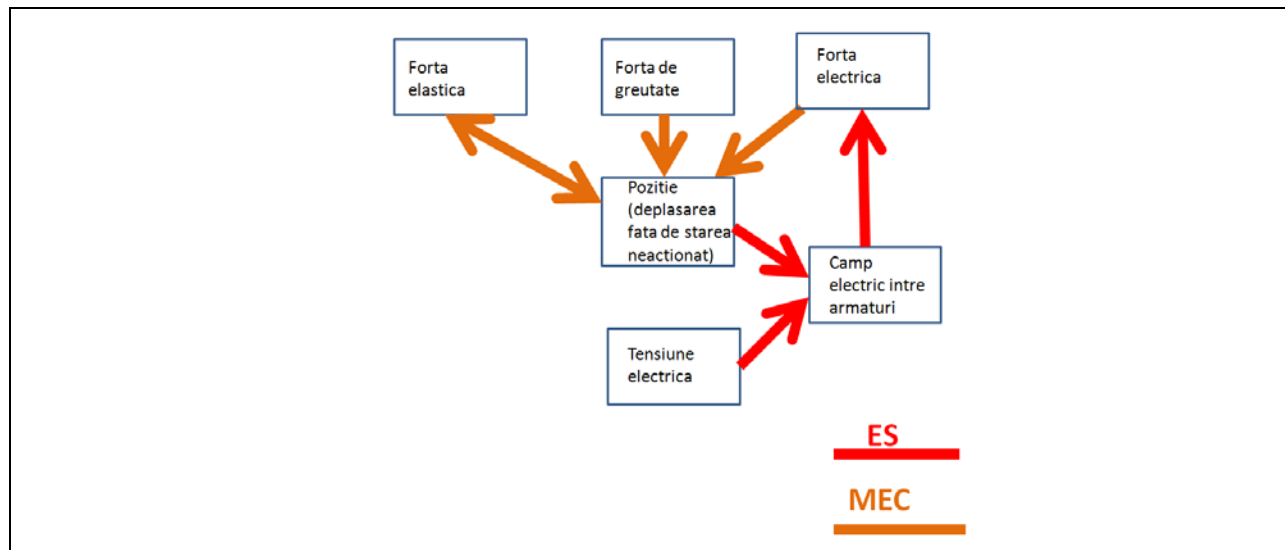


Fig. 5. Relatii cauzale in cuplajul MEC-ES in regim static

3.2 Relatiile intre marimile fizice in domeniul MEC

Fora de greutate care actioneaza asupra armaturii mobile este

$$\mathbf{G} = m\mathbf{g}, \quad (1)$$

unde

m [kg] = masa armaturii mobile, presupusa concentrata in centrul de greutate al armaturii mobile

\mathbf{g} [m/s²] = acceleratia gravitacionala, vector vertical, orientat in jos

\mathbf{G} [N] = fora de greutate, vector vertical, orientat in jos

Daca notam cu \mathbf{k} versorul axei Oz, atunci vom mai scrie ca

$$\mathbf{G} = G\mathbf{k}, \quad (2)$$

unde

$$G = mg \quad (3)$$

este proiectia pe axa Oz a vectorului greutate. Atentie, in multe referinte notatia g este folosita pentru distanta dintre armaturi, fara confuzii deoarece studiile arata ca forta de greutate va putea fi neglijata. De aceea, in cele ce urmeaza vom evita folosirea marimii acceleratie gravitacionala, preferand folosirea marimii forta de greutate.

Fora elastica care actioneaza asupra resortului depinde de deplasarea resortului fata de pozitia sa in starea in care asupra lui nu actioneaza niciun fel de forta.

$$\mathbf{F}_k = k(z - z_0)(-\mathbf{k}), \quad (4)$$

unde

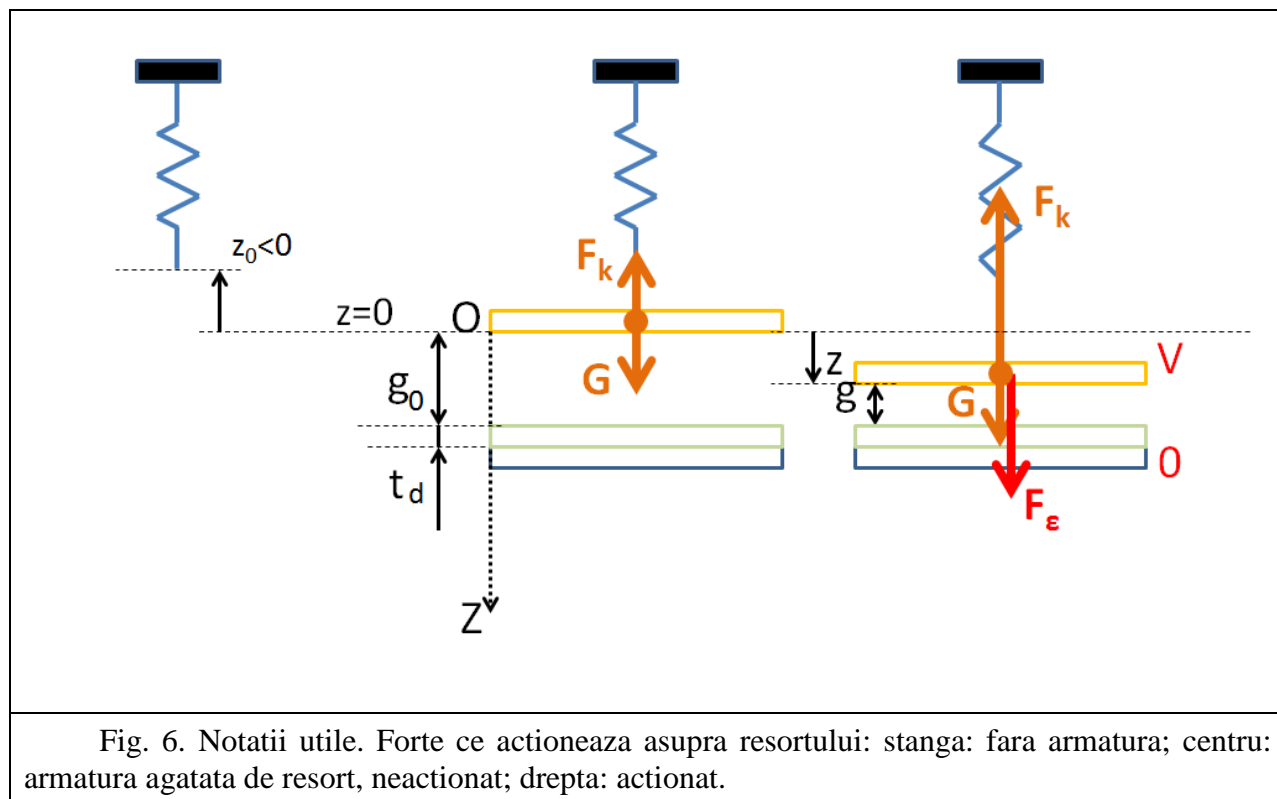
k [N/m] = constanta elastica a resortului

$$z_0 = -\frac{G}{k} \text{ [m]} \quad (5)$$

este coordonata (negativa) ce corespunde starii in care asupra resortului nu actioneaza nici o forta (Fig. 6 stanga si centru).

z [m] este coordonata ce corespunde unei stari in care resortul este actionat (Fig. 6 dreapta).

Atunci cand armaturile se atrag, $z > z_0$ si forta elastica este orientata in sensul negativ al axei Oz.



Forta electrica este influentata indirect de valoarea coordonatei z , expresia ei nu poate fi stabilita numai cu marimile din domeniul MEC.

3.3 Relatiile intre marimile fizice in domeniul ES

Tensiunea electrica aplicata intre armaturi determina aparitia unui camp electrostatic, pe care l-am presupus uniform. Vom nota

V [V] = tensiunea electrica aplicata (egala cu potentialul armaturii mobile in ipoteza ca potentialul armaturii fixe se considera nul).

3.3.1 Microcomutator rezistiv

In cazul unui comutator rezistiv, mediul dielectric dintre armaturi este omogen (vid). Campul electric este uniform (Fig. 7), intensitatea lui fiind

$$\mathbf{E} = E\mathbf{k}, \tag{6}$$

unde

$$E = \frac{V}{g} \tag{7}$$

relatie care rezulta din aplicarea definitiei tensiunii electrice.

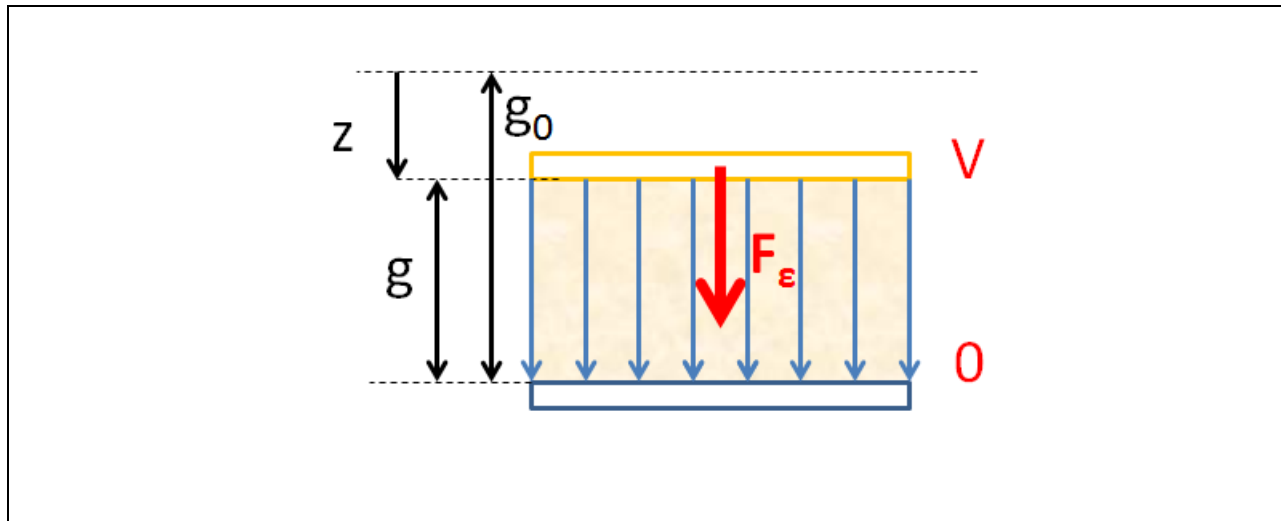


Fig. 7. Spectrul campului electric (intensitate sau inductie) in cazul condensatorului plan paralel cu dielectric omogen.

Daca $V > 0$ atunci campul electric este orientat in sensul pozitiv al axei Oz, altfel este orientat in sens opus.

E [V/m] = este proiectia dupa axa Oz a intensitatii campului electric

Inductia campului electric este in consecinta (conform legii legaturii in camp electric)

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E}, \quad (8)$$

unde

$\varepsilon_0 = \frac{1}{36\pi} 10^{-9} = 8.85 \cdot 10^{-12} \frac{F}{m}$ este permitivitatea electrica a vidului.

Armaturile sunt conductoare, in interiorul lor campul electrostatic este nul si in consecinta ele se incarca cu sarcina, marime ce se poate determina aplicand legea fluxului electric pe o suprafata inchisa ce le inconjoara strans. Astfel, armatura superioara se incarca cu sarcina

$$q = \mathbf{D} \cdot \mathbf{k}A = DA = \frac{\varepsilon_0 AV}{g} \quad (9)$$

unde am notat cu

$$D = \frac{\varepsilon_0 V}{g} \quad (10)$$

proiectia inductiei electrice dupa axa Oz. Similar, armatura inferioara se incarca cu sarcina

$$\mathbf{D} \cdot (-\mathbf{k})A = -q$$

egala si de semn contrar cu sarcina armaturii superioare. Capacitatea condensatorului este

$$C = \frac{q}{V} = \frac{\varepsilon_0 A}{g} \quad (11)$$

iar energia electrica acumulata in dielectric este

$$W_e = \frac{\mathbf{D} \cdot \mathbf{E}}{2} Ag = \frac{CV^2}{2} = \frac{q^2}{2C} \quad (12)$$

Aplicand teorema fortelor generalizate, unde coordonata generalizata este distanta dintre armaturi, forta electrostatica ce actioneaza asupra armaturii mobile este

$$F_\varepsilon = \left. \frac{dW_e}{dg} \right|_{V=ct} = \frac{V^2}{2} \frac{dC}{dg} = -\frac{\varepsilon_0 AV^2}{2g^2} \quad (13)$$

Semnul minus al relatiei (13) indica faptul ca forta electrostatica actioneaza in sensul scaderii coordonatei generalizate, adica este o forta de atractie. In consecinta, scrierea vectoriala trebuie sa fie

$$\mathbf{F}_\varepsilon = -F_\varepsilon \mathbf{k} \quad (14)$$

Se observa ca sensul fortei este independent de polaritatea tensiunii aplicate (semnul marimii V).

3.3.2 Microcomutator capacitiv

In cazul unui microcomutator capacitiv ratiunile sunt similare. Diferenta provine din faptul ca numai inductia electrica este uniforma pe intregul domeniu de calcul ES, impusa de continuitatea componentei normale conform formei pe suprafete de discontinuitate a legii fluxului electric. Intensitatea campului electric este uniforma pe cele doua subdomenii spatiale, cel cu aer si cel cu dielectric (Fig. 8).

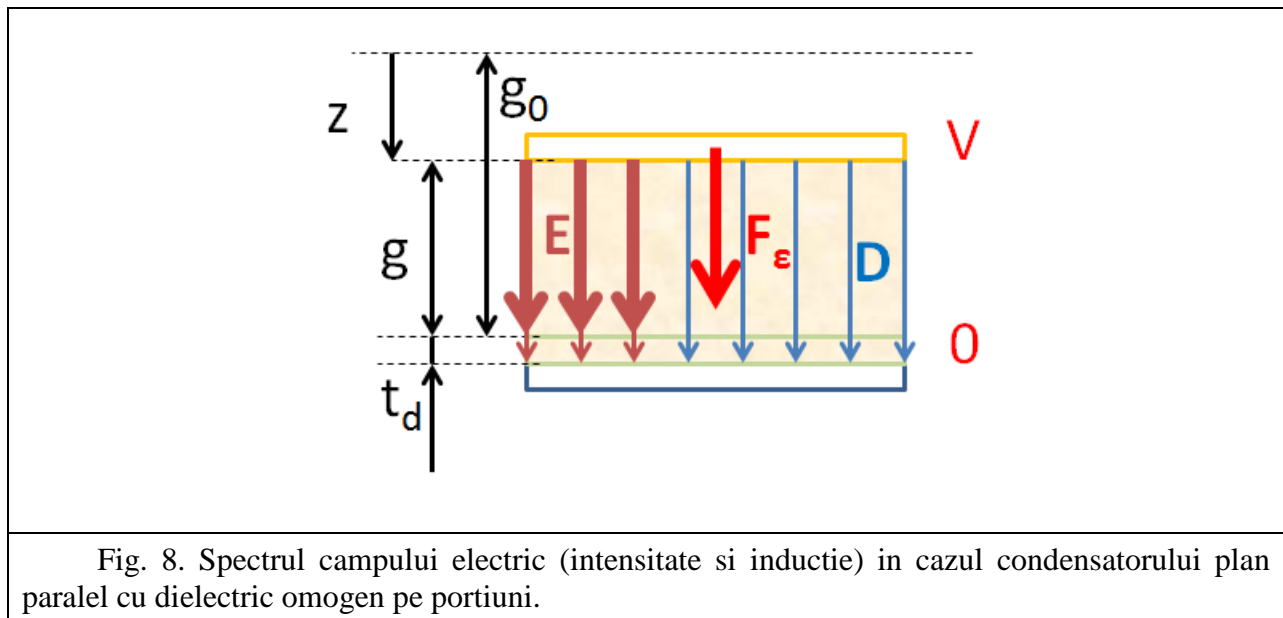


Fig. 8. Spectrul campului electric (intensitate si inductie) in cazul condensatorului plan paralel cu dielectric omogen pe portiuni.

Vom nota cu ε_r permitivitatea electrica relativa a dielectricului de grosime t_d

Continuitatea componentei normale a inductiei electrice impune ca

$$D = \varepsilon_0 E = \varepsilon_0 \varepsilon_r E_d \quad (15)$$

unde E este intensitatea campului electric in aer, iar E_d este intensitatea campului electric in dielectric, iar din relatia de definitie a tensiunii electrice rezulta ca

$$V = Eg + E_d t_d \quad (16)$$

de unde rezulta ca inductia electrica este

$$D = \frac{\varepsilon_0 V}{g + \frac{t_d}{\varepsilon_r}} \quad (17)$$

iar capacitatea condensatorului format este

$$C = \frac{\varepsilon_0 A}{g + \frac{t_d}{\varepsilon_r}} \quad (18)$$

Fora electrostatica ce actioneaza asupra armaturii mobile este

$$\mathbf{F}_\varepsilon = -F_\varepsilon \mathbf{k} \quad (19)$$

unde

$$F_\varepsilon = \left. \frac{dW_e}{dg} \right|_{V=ct} = \frac{V^2}{2} \frac{dC}{dg} = -\frac{\varepsilon_0 A V^2}{2 \left(g + \frac{t_d}{\varepsilon_r} \right)^2} \quad (20)$$

Marimi comune in cele doua formulari fizice

Este util sa facem lista marimilor comune definite in cele doua modele

\mathbf{F}_ε - Forta electrostatica - marime de calculata in problema ES, data de intrare in problema MEC.

z - Coordonata armaturii mobile in MEC; influenteaza distanta dintre armaturi in ES:

$$g = g_0 - z \quad (21)$$

4 Modelarea matematica in regim static

Modelarea matematică are ca scop formularea problemei în termeni exclusiv matematici și verificarea faptului că problema este bine formulată. Pe scurt: ce se da, ce se cere și care sunt relațiile matematice (ecuațiile + condițiile de unicitate).

4.1 Ce se da?

Datele problemei sunt:

4.1.1 Geometria domeniului de calcul

MEC

- nimic (punct material)

ES

- g [m] - distanta dintre armaturi (de fapt asta e o necunoscuta, dar ea o data a problemei ES);
- g_0 [m] - distanta initiala dintre armaturi
- t_d [m] - grosimea dielectricului
- A [m²] - aria armaturii

4.1.2 Materiale

MEC

- m [kg] - masa armaturii mobile
- k [N/m] - constanta elastica a resortului

ES

- ε_r [-] - permitivitatea relativa a dielectricului

4.1.3 Surse interne de camp

MEC

- forta de greutate.

ES

- nu exista nicio sursa interna de camp electric in interiorul domeniului ES

4.1.4 Conditii de frontiera

MEC

- Deplasarile fixe ale armaturii inferioare si punctului superior al resortului.

ES

- V - Potentialul armaturii superioare
- Armatura inferioara considerata de potential 0
- Componenta normala nula a inductiei electrice pe cele doua linii verticale ale domeniului dreptunghiular folosit in rationamentele ES de mai sus

4.1.5 Conditii initiale

Nu e cazul in nici o formulare, analiza fiind statica

4.2 Ce se cere?

g [m] - distanta dintre armaturi

4.3 Relatiile dintre date si rezultate

Relațiile care trebuie să fie satisfăcute între acestea, adică ecuațiile, însoțite de condițiile de frontieră și de cel inițiale.

Conditia de echilibru al armaturii mobile in regim static impune urmatoarele relatii:

MEC:

$$\mathbf{G} + \mathbf{F}_k + \mathbf{F}_\varepsilon = \mathbf{0} \quad (22)$$

Adica

$$G\mathbf{k} - k(z - z_0)\mathbf{k} + \mathbf{F}_\varepsilon = \mathbf{0} \quad (23)$$

sau inlocuind expresia (5)

$$G\mathbf{k} - k\left(z + \frac{G}{k}\right)\mathbf{k} + \mathbf{F}_\varepsilon = \mathbf{0} \quad (24)$$

de unde rezulta ca greutatea nu este relevanta in regim static.

$$-kz\mathbf{k} + \mathbf{F}_\varepsilon = \mathbf{0} \quad (25)$$

ES:

$$\mathbf{F}_\varepsilon = \frac{\varepsilon_0 AV^2}{2\left(g + \frac{t_d}{\varepsilon_r}\right)^2} \mathbf{k} \quad (26)$$

Este suficient sa lucram numai cu proiectiile relatiilor (25) si (26) dupa axa OZ, astfel incat relatiile matematice utile pentru acest model sunt

MEC:

$$kz = F_{ES} \quad (27)$$

ES:

$$F_{ES} = \frac{\varepsilon_0 AV^2}{2 \left(g + \frac{t_d}{\varepsilon_r} \right)^2} \quad (28)$$

unde am notat

$$F_{ES} = \mathbf{F}_\varepsilon \cdot \mathbf{k} = -F_\varepsilon \quad (29)$$

iar relatia intre distanta dintre armaturi si coordonata deplasarii este data de (21). Substituind expresia coordonatei, formularea problemei avand ca necunoscuta distanta dintre armaturi este:

MEC:

$$k(g_0 - g) = F_{ES} \quad (30)$$

ES:

$$F_{ES} = \frac{\varepsilon_0 AV^2}{2 \left(g + \frac{t_d}{\varepsilon_r} \right)^2} \quad (31)$$

unde este evident ca marimea de cuplaj dintre cele doua probleme astfel formulate este forta de natura electrostatica. Pentru ES problema este formulata explicit: se da geometria, materialele, tensiunea de actionare si calculul fortei se face explicit in functie de acestea. Pentru MEC problema este formulata implicit. Se da forta, materialele, pozitia initiala, se cere pozitia g .

Relatiile fiind algebrice, nu este nevoie de impunerea unor conditii de frontiera si nici conditii initiale.

Evident ca substituind expresia fortei electrostatice, ajungem la o singura ecuatie algebrica de gradul 3 de forma.

MEC+ES:

$$k(g_0 - g) = \frac{\varepsilon_0 AV^2}{2 \left(g + \frac{t_d}{\varepsilon_r} \right)^2} \quad (32)$$

Ecuatia MEC+ES poate avea din punct de vedere matematic 3 solutii reale din care una singura va fi cea fizica. De aceea este bine stabilim pe care trebuie sa le satisfaca solutia. In acest caz sunt doua restrictii:

- Este evident ca solutia fizica trebuie sa satisfaca $g \in [0, g_0]$, pentru ca asupra armaturii actioneaza o forta de atractie, iar deplasarea nu poate depasi punctul in care are loc contactul.
- De asemenea, starea de echilibru atinsa trebuie sa fie una stabila.

Matematic, relatia MEC+ES poate fi pusa sub forma unei ecuatii neliniare de rezolvat :

$$f(g) = 0 \quad (33)$$

unde

$$f(g) = g \left(g + \frac{t_d}{\varepsilon_r} \right)^2 - g_0 \left(g + \frac{t_d}{\varepsilon_r} \right)^2 + \frac{\varepsilon_0 AV^2}{2k} \quad (34)$$

in cazul capacitiv. Cazul rezistiv se obtine inlocuind $t_d = 0$.

5 Modelarea analitica in regim static

Se poate face o modelare analitica exacta a acestei probleme.

5.1 Cazul rezistiv

Vom considera exemplul din [Rebeiz,2003] pagina 38. Nu exista dielectric intre armaturi, $t_d = 0$, iar restul datelor necesare sunt $A = LW$ unde $L = 100 \mu m$ este lungimea armaturii, $W = 100 \mu m$ este latimea armaturii, distanta initiala dintre armaturi este $g_0 = 3 \mu m$, iar constanta elastica a restorului este $k = 10 \text{ N/m}$. Reamintim permitivitatea vidului $\varepsilon_0 = \frac{1}{36\pi} 10^{-9} \frac{\text{F}}{\text{m}}$. Iar tensiunea de actionare o vom considera in plaja $[0,40] \text{ V}$.

$$f_{rez}(g) = g^3 - g_0 g^2 + \frac{\varepsilon_0 AV^2}{2k} \quad (35)$$

Daca facem analiza graficului acestei functii, care are derivata de ordinul I

$$f_{rez}'(g) = 3g^2 - 2g_0 g \quad (36)$$

si derivata de ordinul al II-lea

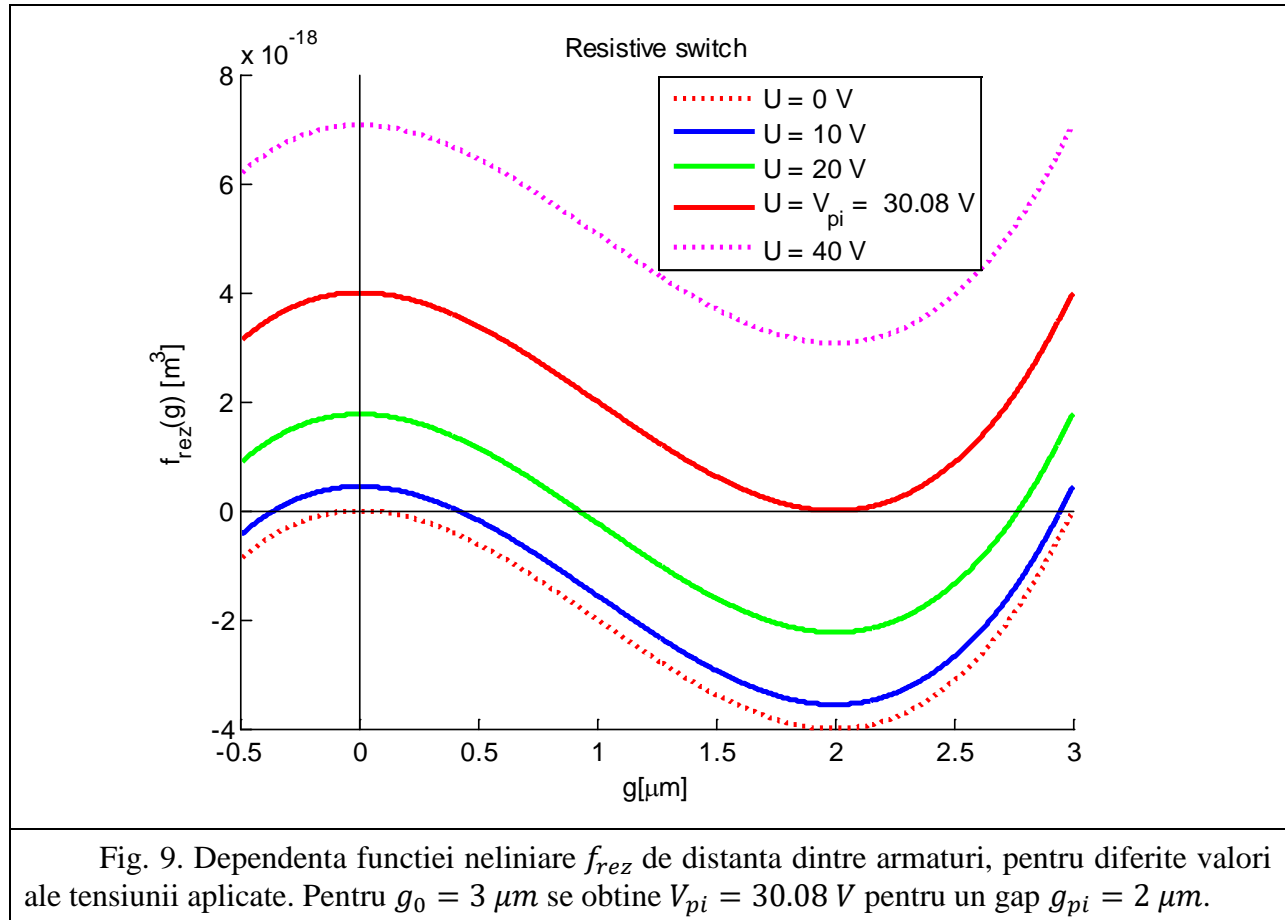
$$f_{rez}''(g) = 6g - 2g_0 \quad (37)$$

rezulta urmatorul tabel de variatie al functiei

g	$-\infty$	0		$\frac{g_0}{3}$		$\frac{2g_0}{3}$	$+\infty$
$f_{rez}(g)$	Cresc. \uparrow	$\frac{\varepsilon_0 AV^2}{2k} > 0$ Pct.de maxim local	Descr. \downarrow	\downarrow Pct.de inflexiune	\downarrow	$-\frac{4g_0^3}{27} + \frac{\varepsilon_0 AV^2}{2k}$ Punct de minim local	\uparrow
$f_{rez}'(g)$	Pozitiva	0	Negativa			0	Pozitiva
$f_{rez}''(g)$	Negativa			0	Pozitiva		

Intotdeauna ecuatia neliniara de rezolvat va avea o solutie negativa, care nu are semnificatie din punct de vedere fizic, si alte 2, 1 sau niciuna solutii reale, totul depinde de valoarea tensiunii de actionare.

Reprezentarea grafica a acestei functii pentru valorile specificate mai sus si pentru diferite valori ale tensiunii aplicate intre armaturi este prezentata in Fig. 9 (codul matlab este in anexa 11.1).



Daca valoarea functiei in punctul de minim local este strict pozitiva, adica

$$-\frac{4g_0^3}{27} + \frac{\epsilon_0 AV^2}{2k} > 0$$

atunci nu exista solutie reala a ecuatiei in intervalul considerat, armatura nu poate sta in echilibru, aplicarea unei astfel de tensiuni duce la prabusirea armaturii superioare.

Daca valoarea functiei in punctul de minim local este egala cu zero, adica

$$-\frac{4g_0^3}{27} + \frac{\epsilon_0 AV^2}{2k} = 0$$

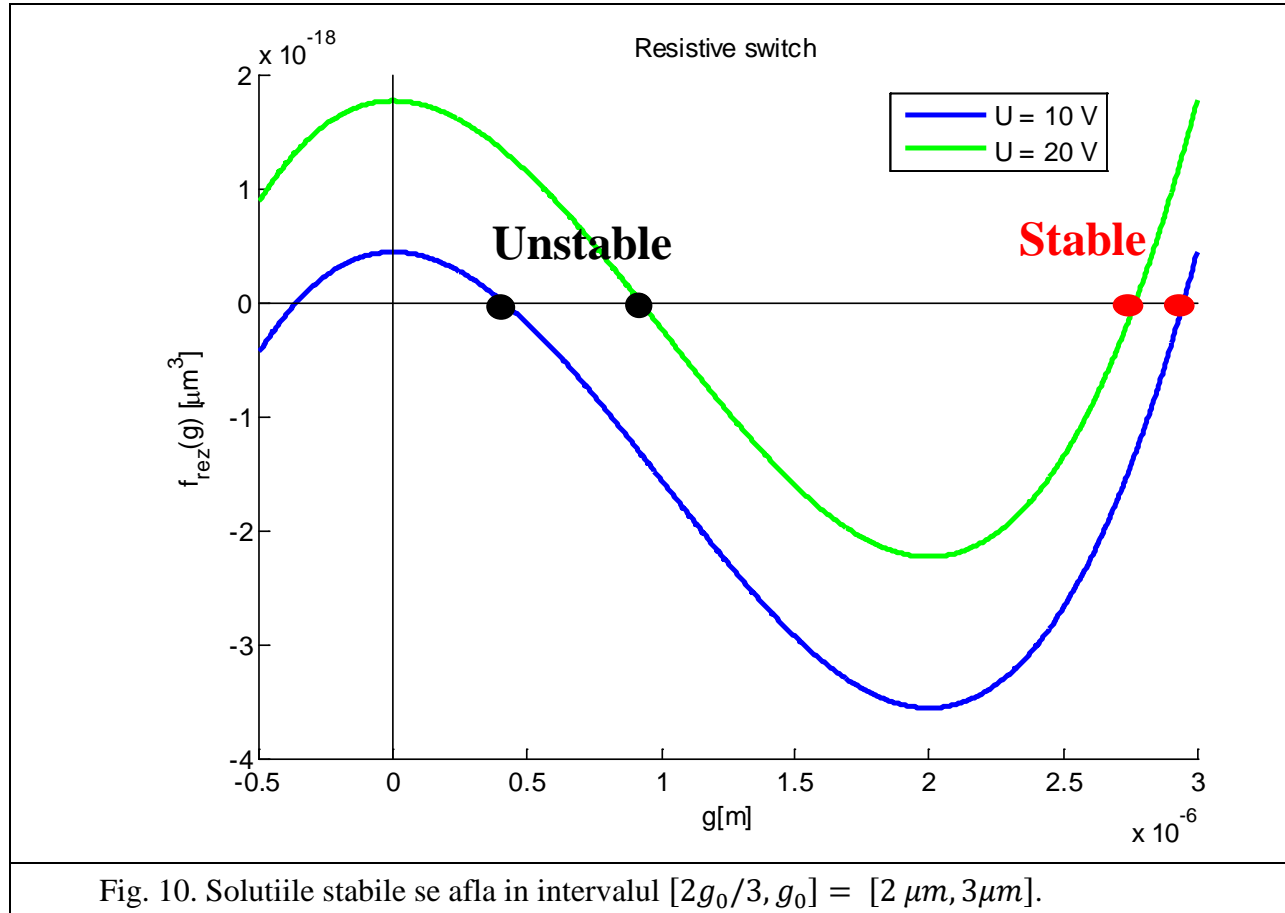
atunci exista o singura solutie reala a acestei ecuatiei. Tensiunea corespunzatoare acestui caz se numeste "pull-in voltage" (tensiune minima de actionare) si are valoarea

$$V_{pi} = \sqrt{\frac{8kg_0^3}{27\epsilon_0 A}} \quad (38)$$

Daca valoarea functiei in punctul de minim local este mai mica decat zero, adica

$$-\frac{4g_0^3}{27} + \frac{\epsilon_0 AV^2}{2k} < 0$$

atunci ecuatia are doua solutii reale. Din aceste doua solutii matematice, numai una are semnificatie fizica si anume cea corespunzatoare unui sistem stabil. Daca tensiunea are o crestere mica fata de pozitia de echilibru static, atunci noua pozitie de echilibru static trebuie sa corespunda unei distante un pic mai mici intre electrozi (Fig. 10) deoarece forta de atractie electrostatica creste. Analizand forma curbei si ce se intampla la cresterea tensiunii de actionare, rezulta ca in cazul in care ecuatia neliniara are doua solutii reale pozitive, cea stabila este cea care se afla in intervalul $[2g_0/3, g_0]$.



Un alt rezultat care intereseaza este graficul dependentei solutiei stabile (si instabile) de tensiunea de actionare. O varianta este de a folosi formulele analitice pentru solutiile ecuatiei de

gradul 3, dar un mod de reprezentare mai simplu este acela de a considera functia inversa si a calcula tensiunea in functie de deplasare. Din relatia (egalata cu zero rezulta ca

$$V = \sqrt{\frac{2k}{\epsilon_0 A} g^2 (g_0 - g)} \quad (39)$$

relatie care calculata pentru $g \in [0, 2g_0/3]$ va furniza punctele instabile, iar calculata pentru $g \in [2g_0/3, g_0]$ va furniza punctele stabile. Este lipsit de sens ca aceasta formula sa fie aplicata pentru valori ale distantei dintre armaturi in afara acestui interval.

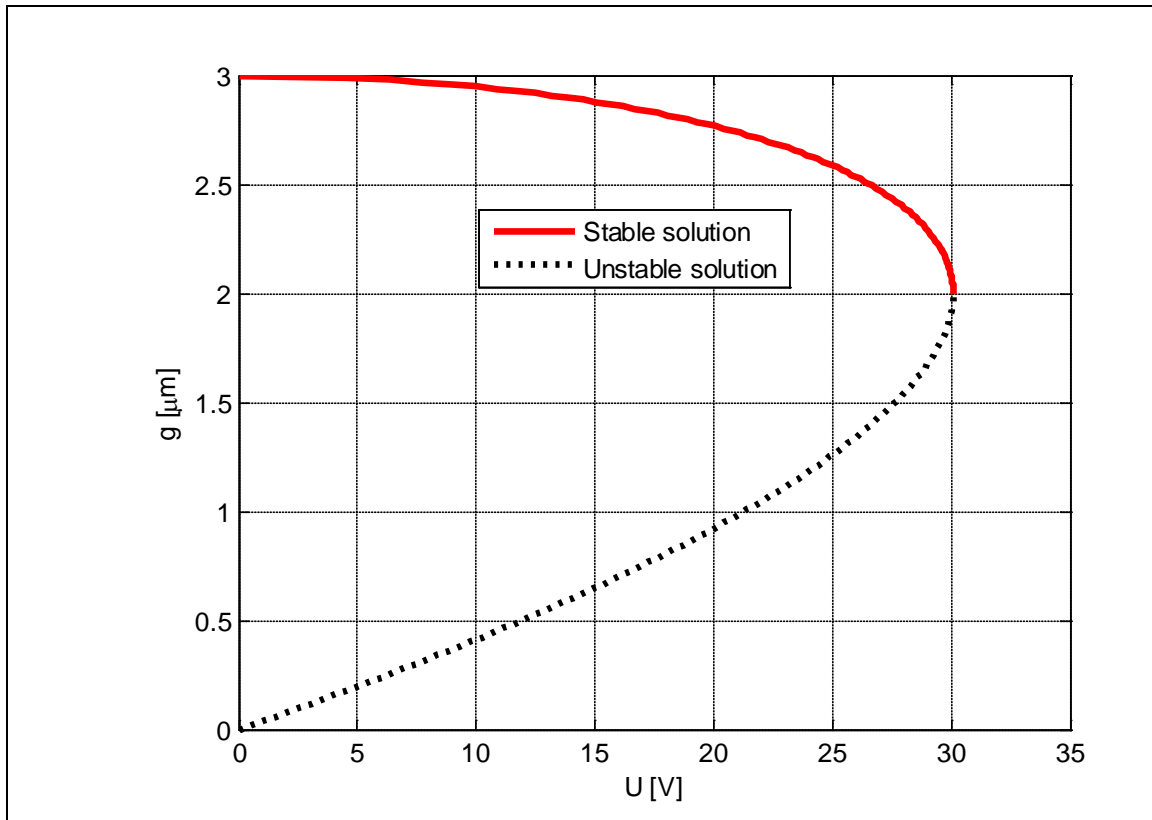


Fig. 11. Celebra curba gap-tensiune, care apare in majoritatea lucrarilor. Ea reprezinta de fapt cele doua solutii ale ecuatiei neliniare de rezolvat in functie de tensiunea aplicata. Din aceste doua solutii, numai una este posibila, cea marcata cu linie continua.

In concluzie, in cazul rezistiv, perechea g-V corespunzatoare punctului critic aflat intre zona de stabilitate si instabilitate este data de

$$g_{pi} = \frac{2g_0}{3}, \quad V_{pi} = \sqrt{\frac{8k g_0^3}{27 \epsilon_0 A}} \quad (40)$$

5.2 Cazul capacitiv

Vom presupune acum ca între armături există un dielectric de grosime $t_d \neq 0$ și permitivitate relativă ε_r . Ecuația de rezolvat este atunci

$$f_{cap}(g) = 0 \quad (41)$$

unde

$$f_{cap}(g) = (g - g_0) \left(g + \frac{t_d}{\varepsilon_r} \right)^2 + \frac{\varepsilon_0 A V^2}{2k} \quad (42)$$

Această funcție are derivata de ordinul I

$$f_{cap}'(g) = \left(g + \frac{t_d}{\varepsilon_r} \right) \left(3g - 2g_0 + \frac{t_d}{\varepsilon_r} \right) \quad (43)$$

și derivata de ordinul al II-lea

$$f_{cap}''(g) = 6g - 2g_0 + 4 \frac{t_d}{\varepsilon_r} \quad (44)$$

rezultă următorul tabel de variație al funcției

g	$-\infty$	$-\frac{t_d}{\varepsilon_r}$		$\frac{g_0}{3} - \frac{2t_d}{3\varepsilon_r}$		$\frac{2g_0}{3} - \frac{t_d}{3\varepsilon_r}$	$+\infty$
$f_{rez}(g)$	Cresc. \uparrow	$\frac{\varepsilon_0 A V^2}{2k} > 0$ Pct. de maxim local	Descr. \downarrow	\downarrow	\downarrow	$-\frac{4}{27} \left(g_0 + \frac{t_d}{\varepsilon_r} \right)^3 + \frac{\varepsilon_0 A V^2}{2k}$ Punct de minim local	\uparrow
$f_{rez}'(g)$	Pozitivă	0	Negativă			0	Pozitivă
$f_{rez}''(g)$	Negativă			0	Pozitivă		

Fata de cazul rezistiv, punctul de minim local, cel care da valoarea tensiunii pull-in este mai mic decât două treimi din gap-ul inițial.

$$g_{pi} = \frac{2g_0}{3} - \frac{t_d}{3\varepsilon_r}, \quad V_{pi} = \sqrt{\frac{8k}{27\varepsilon_0 A} \left(g_0 + \frac{t_d}{\varepsilon_r} \right)^3} \quad (45)$$

Pentru a putea face o comparatie cu cazul rezistiv, ne imaginam ca in spatiul initial al comutatorului rezistiv de grosime 3 micrometri introducem un dielectric (a carui permitivitate relativa a fost aleasa 7.5 - tipica pentru Si_3N_4). De aceea comparatiile in figurile de mai jos intre cazul rezistiv si cel capacitiv impun ca gap-ul initial din cazul rezistiv sa fie suma dintre gap-ul initial din cazul capacitiv si grosimea dielectricului, lucru care se vede pe graficul functiei neliniare, daca aceasta este reprezentata pentru o tensiune nula (Fig. 12, obtinuta cu codul din anexa).

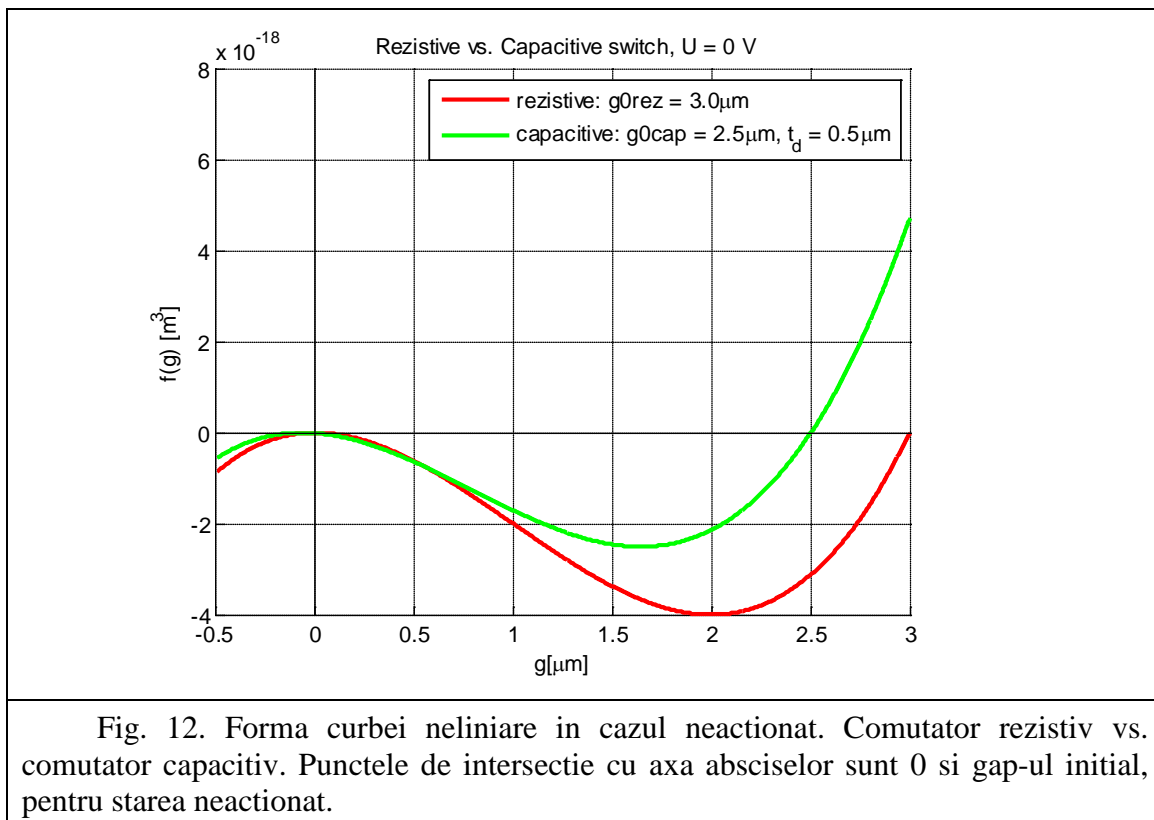


Fig. 12. Forma curbei neliniare in cazul neactionat. Comutator rezistiv vs. comutator capacitiv. Punctele de intersectie cu axa absciselor sunt 0 si gap-ul initial, pentru starea neactionat.

Analiza dependentei curbei neliniare de tensiunea de actionare arata ca introducerea dielectricului intre armaturi are ca efect scaderea tensiunii de pull-in

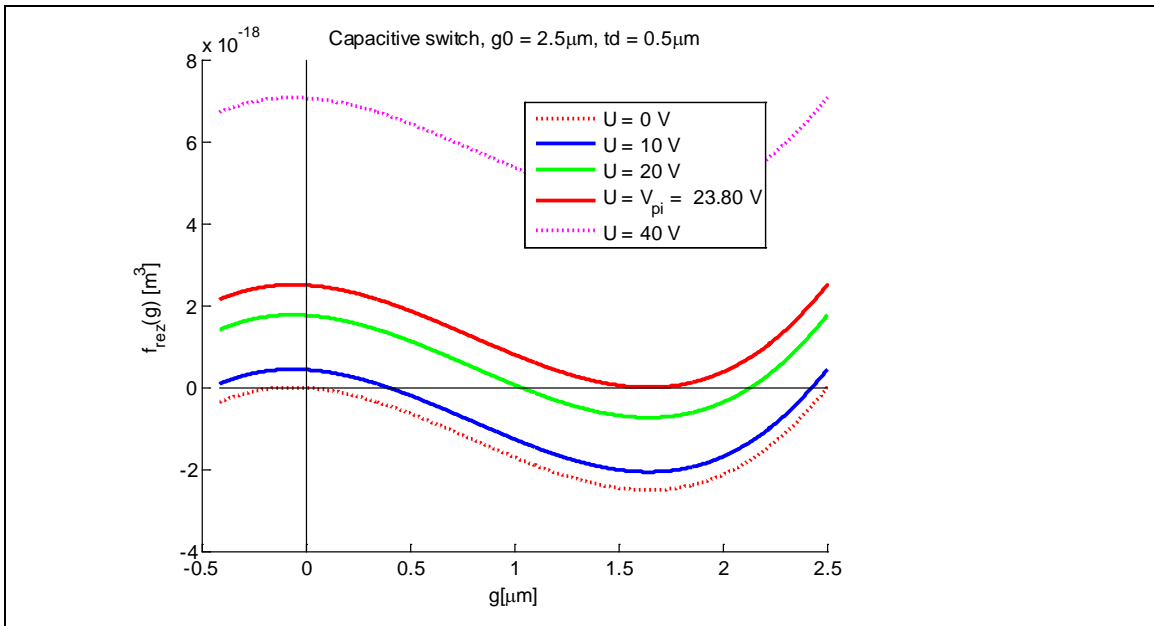


Fig. 13. Dependenta functiei neliniare f_{cap} de distanta dintre armaturi, pentru diferite valori ale tensiunii aplicate. Cazul $g_{0-cap} = 2.5 \mu m, t_d = 0.5 \mu m$. Se obtine $V_{pi} = 23.8 V$ pentru un gap $g_{pi} = 1.64 \mu m$

Exemplul de mai sus are exagerata grosimea stratului de dielectric, in mod tipic $t_d = 0.1 \mu m$, rezultat prezentat in Fig. 14.

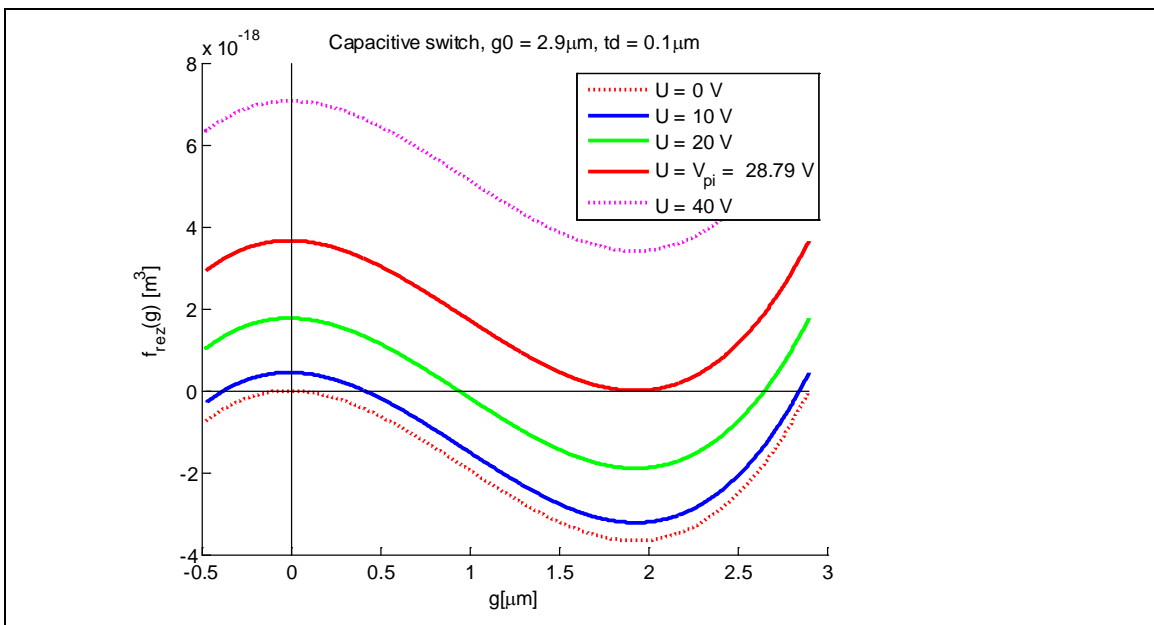
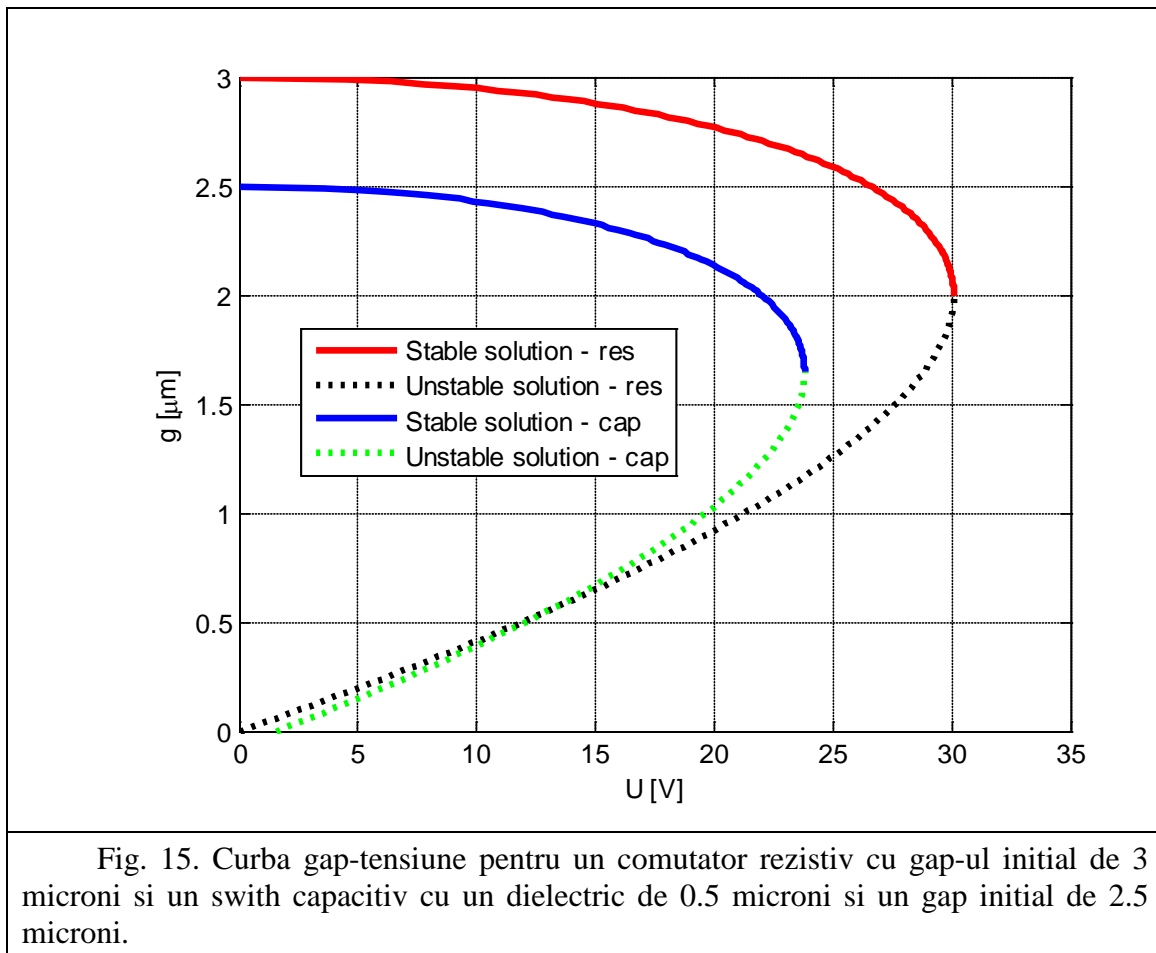


Fig. 14. Dependenta functiei neliniare f_{cap} de distanta dintre armaturi, pentru diferite valori ale tensiunii aplicate. Cazul $g_{0-cap} = 2.9 \mu m, t_d = 0.1 \mu m$. Se obtine $V_{pi} = 28.79 V$ pentru un gap $g_{pi} = 1.93 \mu m$

Efectul asupra curbei "clasice" gap-tensiune este prezentat in Fig. 15.

Ea a fost trasata folosind dependenta tensiunii de gap, obtinuta din egalarea relatiei (46) cu zero:

$$V = \sqrt{\frac{2k}{\epsilon_0 A} (g_0 - g) \left(g + \frac{t_d}{\epsilon_r}\right)^2} \quad (46)$$



O imagine mai corecta asupra realitatii este data in Fig. 16. Pentru o tensiune mai mare decat V_{pi} , condensatorul trece in starea jos si gap-ul de aer este nul.

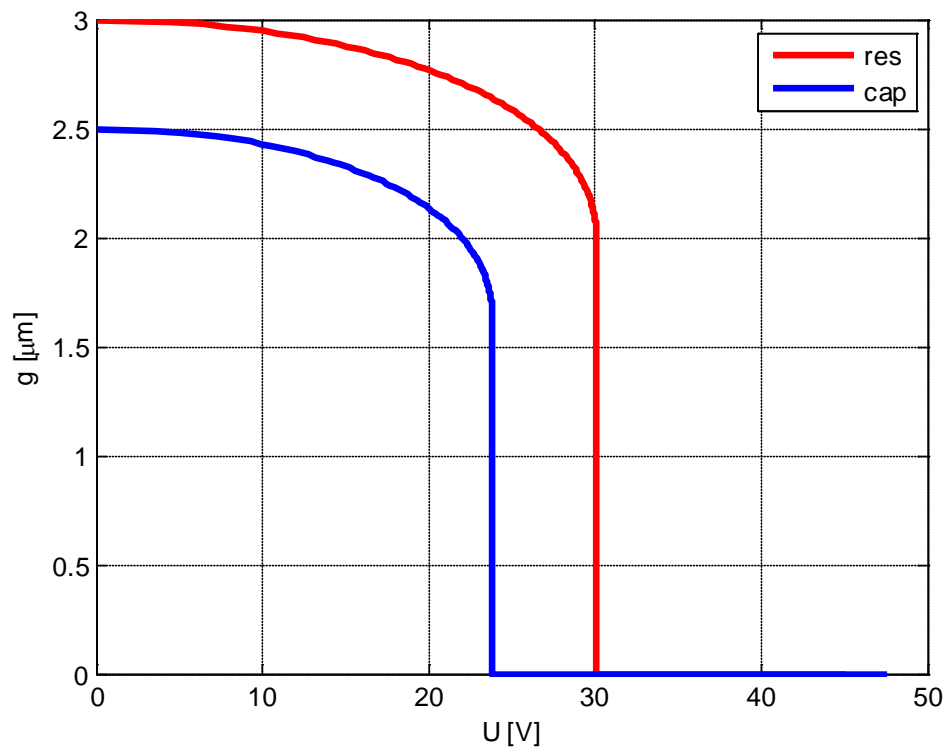


Fig. 16. Distanța reală dintre armături în cazul aplicării unei tensiuni. Comutatorul rezistiv are gap-ul inițial de 3 micrometri. Comutatorul capacitiv are gap-ul inițial de 2.5 micrometri și un dielectric cu grosimea de 0.5 micrometri.

O altă reprezentare a distanței dintre armături este capacitatea condensatorului care se formează. În cazul rezistiv

$$C_{res} = \frac{\epsilon_0 A}{g} \quad (47)$$

iar în cazul capacitiv

$$C_{cap} = \frac{1}{\frac{g}{\epsilon_0 A} + \frac{t_d}{\epsilon_0 \epsilon_r A}} \quad (48)$$

Relațiile g-V și C-V sunt date în Fig. 17 și Fig. 18.

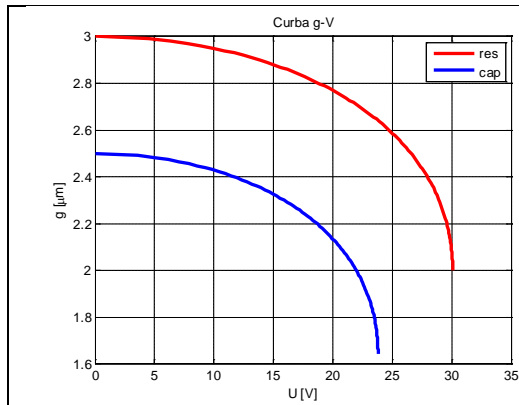


Fig. 17. Curba g-V.

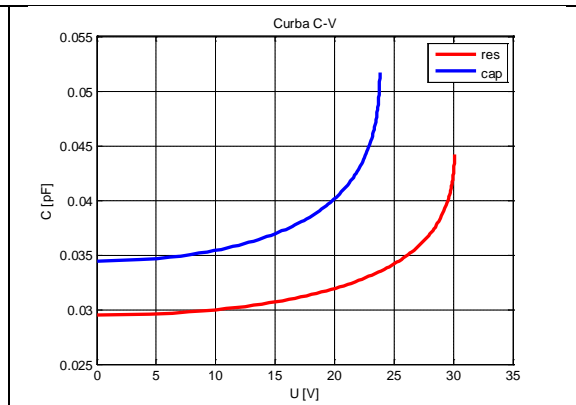


Fig. 18. Curba C-V.

În cazul comutatorului capacitiv, putem calcula capacitatea și pentru tensiuni mai mari decât V_{pi} , aceasta fiind capacitatea unui condensator cu distanța dintre armături t_d , umplut cu dielectric. Evident acest lucru nu îl putem face pentru comutatorul rezistiv deoarece în starea acționat acest comutator ar avea capacitatea infinită. De aceea, în cele ce urmează vom continua cu reprezentarea numai pentru comutatorul capacitiv, continuată și dincolo de tensiunea de pull-in.

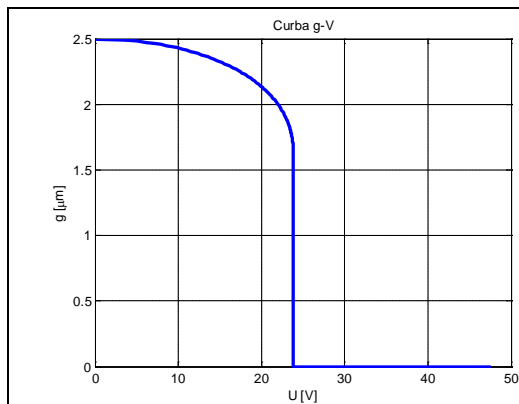


Fig. 19. Curba g-V și dincolo de V_{pi} pentru comutatorul capacitiv.

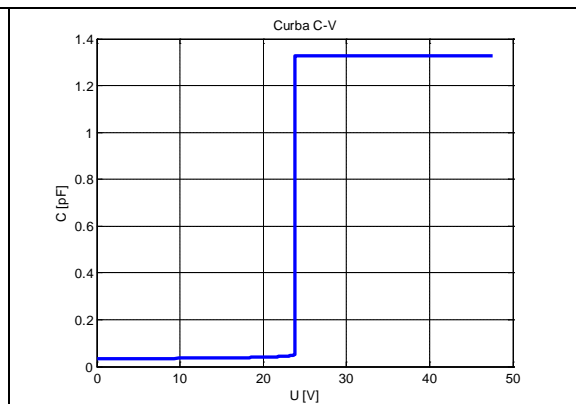


Fig. 20. Curba C-V și dincolo de V_{pi} pentru comutatorul capacitiv..

Într-o astfel de reprezentare, alura curbei în zona stabilă nu se mai distinge, deoarece capacitatea în starea jos este de 30-40 ori mai mare decât capacitatea în starea acționat. În exemplul studiat:

$$C_{down} = 1.3263 \text{ pF}, C_{up} = 0.0344 \text{ pF}, C_{pi} = 0.0517 \text{ pF},$$

$$C_{down}/C_{up} = 38.5, C_{down}/C_{pi} = 25.6.$$

Tensiunea de eliberare - numai pentru comutatoare capacitive

Toate rationamentele de pana acum le-am facut, asa cum e natural, imaginandu-ne ca initial nu exista nici o tensiune aplicata si ca aplicam o tensiune la borne. Desigur, aceasta nu se poate face brusc si daca ne imaginam ca ritmul de crestere este suficient de lent, atunci la fiecare moment de timp putem presupune ca sistemul este intr-o stare statica. In momentul in care comutatorul este in starea jos, conform curbei din figura Fig. 19, tensiunea de alimentare este dincolo de V_{pi} si nu mai are rost sa o crestem.

Daca ne imaginam acum ca scadem incet tensiunea, fenomenele nu sunt reversibile deoarece acum problema cu care pornim este diferita. Avem acum un condensator care are intre armaturi numai dielectric, nu dielectric si aer asa cum am presupus in toate rationamentele de pana acum.

Condensatorul din starea down, care are numai dielectric, necesita o tensiune mai mica decat V_{pi} pentru a fi mentinut in aceasta stare.

Conditia este ca forta elastica corespunzatoare intinderii resortului cu distanta g_0 , forta ce este orientata in sus sa fie mai mica decat forta electrostatica corespunzatoare condensatorului cu dielectric, fara nici un strat de aer la care se adauga greutatea armaturii, ambele fiind orientate in jos.

Conditia de a mentione condensatorul in starea down este deci

$$kg_0 \leq \frac{\epsilon_0 AV^2}{2 \left(\frac{t_d}{\epsilon_r}\right)^2} + G \quad (49)$$

de unde

$$V \geq \frac{t_d}{\epsilon_r} \sqrt{\frac{2}{\epsilon_0 A} (kg_0 - G)} \quad (50)$$

Evident ca daca greutatea e mai mare decat forta elastica corespunzatoare unei alungiri cu g_0 , nu este nevoie sa ai o tensiune aplicata armaturilor pentru a mentine comutatorul jos. De altfel, un astfel de switch nu va fi niciodata up.

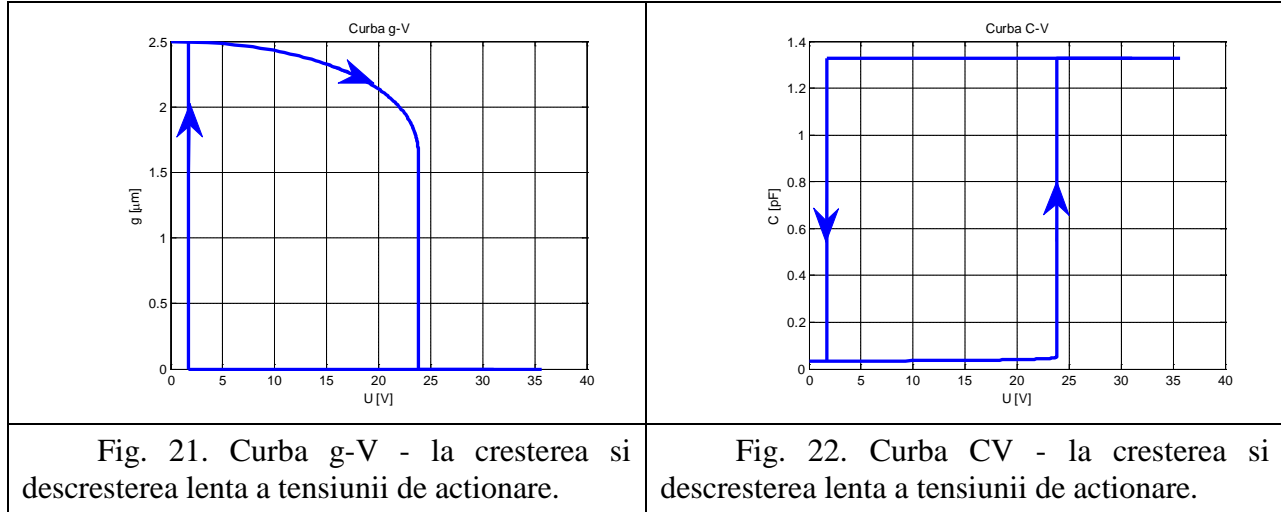
Daca incercam o estimare a masei pentru exemplul numeric considerat. Sa presupunem ca armatura este din Al, care are o densitate de masa de 2.7 g/cm³, si presupunem o grosime a armaturii de 0.5 microni, atunci rezulta o greutate de 1.3e-10 N, fata de forta elastica corespunzatoare alungirii maxime a resorului care este $kg_0 = 3e-5$ N. In consecinta, masa se poate neglija in estimarea formulei de mai sus.

Valoarea minima a acestei expresii se numeste tensiune de pull-out (tensiune de eliberare/revenire/deschidere) si are valoarea

$$V_{po} = \frac{t_d}{\epsilon_r} \sqrt{\frac{2}{\epsilon_0 A} (kg_0 - G)} \quad (51)$$

Daca tensiunea de actionare devine mai mica decat V_{po} atunci armatura superioara este eliberata si punctele g-V, respectiv C-V revin pe curba de stabilitate.

O reprezentare a acestei curbe de "eliberare" peste cele de inchidere produce figurile cu histerezis Fig. 21 si Fig. 22.



6 Modelarea numerica in regim static

Modelarea numerica consta in conceperea unui algoritm dedicat rezolvării ecuațiilor modelului.

Ceea ce este interesant este ca fiecare problema luata separat este liniara din punct de vedere al relațiilor constitutive (de material). In ES, materialele sunt liniare iar in MEC resortul e liniar (k este constanta, nu depinde de forta aplicata). Dar cuplajul dintre probleme este neliniar, astfel incat chiar si aceasta problema simpla este neliniara.

Rezolvarea numerica in regim static inseamna gasirea punctului g-V, in zona de echilibru stabil, adica $g \in [2g_0/3, g_0]$, problema care are solutie unica, si este bine conditionata, conform studiilor anterioare.

Formulara naturala (din punct de vedere fizic) este aceea in care

se da V si se cere $g \in [2g_0/3, g_0]$ (*problema directa*),

dar avand in vedere bijectivitatea functiei, am putea formula problema si invers:

se da $g \in [2g_0/3, g_0]$, sa se afle V (*problema inversa*),

astfel incat sistemul sa fie in echilibru static.

Date fiind toate rationamentele anterioare, problema directa este mai dificil de rezolvat (o ecuatie neliniara, algebrica, de gradul 3), pe cand problema inversa are deja solutia exprimata explicit in functie de datele problemei.

6.1 Cuplaj tare

In cazul problemei directe, cuplajul tare inseamna rezolvarea ecuatiei neliniare, de exemplu cu metoda Newton si initializare g_0 .

In cazul problemei inverse, rezolvarea cuplajului tare este banala, asa cum se vede in codul urmator.

```
clear all;
g0 = 2.5e-6; % gap-ul initial de aer
td = 0.5e-6; % grosimea stratului de dielectric [m]
epsilon_r = 7.5; % permitivitatea electrica relativa a dielectricului
k = 10; % constanta elastica a resortului [N/m]
epsilon = 1/(36*pi*1e9); % permitivitatea electrica absoluta a vidului [F/m]
A = 100e-6*100e-6; % aria armaturii [m^2]

gpi = 2*g0/3 - td/epsilon_r/3;
Vpi = sqrt(8*k/(27*epsilon*A)*(g0+td/epsilon_r)^3); % pull-in voltage

% rezolvare tare - problema inversa in 5 pct
g = linspace(gpi,g0,5)
V = sqrt(2*k*(g + td/epsilon_r).^2.*(g0-g)/epsilon/A)
```

6.2 Cuplaj slab

Daca ar fi fost dificil de gasit o ecuatie care sa inglobeze fenomenele ES+MEC, atunci o varianta de rezolvare numerica ar fi fost iteratiile dintr-un domeniu in altul, prin intermediul marimilor de cuplaj, pana cand se atinge o eroare impusa.

De exemplu, in cazul nostru, se porneste de la g_0 , se calculeaza forta electrostatica, noua deplasare, etc.

Codul acestei rezolvari este urmatorul:

```
clear all;
g0 = 2.5e-6; % gap-ul initial de aer
td = 0.5e-6; % grosimea stratului de dielectric [m]
epsilon_r = 7.5; % permitivitatea electrica relativa a dielectricului
k = 10; % constanta elastica a resortului [N/m]
epsilon = 1/(36*pi*1e9); % permitivitatea electrica absoluta a vidului [F/m]
A = 100e-6*100e-6; % aria armaturii [m^2]

gpi = 2*g0/3 - td/epsilon_r/3;
Vpi = sqrt(8*k/(27*epsilon*A)*(g0+td/epsilon_r)^3); % pull-in voltage

% rezolvare tare - problema inversa in 5 pct
g = linspace(gpi,g0,5)
V = sqrt(2*k*(g + td/epsilon_r).^2.*(g0-g)/epsilon/A)

% rezolvare slaba - iau un pct din cele cunoscute din rezolvarea tare
gref = g(3); % ca sa am referinta, voi compara cu ea rezultatul numeric
Vdat = V(3); % tensiunea o consider data

er_impus = 0.001; % eroare impusa procedurii iterative
maxit = 100; % nr maxim de iteratii

gv = g0;
corectie = 1;
iter = 0;
```

```

while and((corectie > er_impus),(iter<maxit))
    iter = iter + 1;
    Fes = epsilon*A*Vdat^2/2/(gv+td/epsilon_r)^2; % rezolvare ES
    gn = g0 - Fes/k;
    corectie = abs(gn-gv)/abs(gv);
    gv = gn; % actualizare solutie veche
    fprintf('iteratia %d: gref = %f, solutie = %f, corectie_rel = %f, eroare_rel = %f \n',...
        iter,gref*1e6,gv*1e6,corectie,abs(gv-gref)/abs(gref));
end
if iter >= maxit
    disp('Procedura neconvergenta');
end

```

Aceasta rezolvare este echivalenta cu o metoda de iteratie simpla.

7 Verificarea si validarea modelului static

Verificarea și validarea modelului: se implementează algoritmul de rezolvare numerică pe un sistem de calcul și se realizează o serie de simulări, ale căror rezultate sunt folosite pentru a valida modelul elaborat.

7.1 Cuplaj tare

$$g = 1.0e-005 * [0.1644 \quad 0.1858 \quad 0.2072 \quad 0.2286 \quad 0.2500]$$

$$V = [23.8036 \quad 23.1914 \quad 21.0397 \quad 16.3650 \quad 0]$$

Practic nu e o rezolvare numerica ci un calcul cu formula analitica.

7.2 Cuplaj slab

In acest caz lucrurile converg rapid. Validarea se face fata de solutia analitica.

```

iteratia 1: gref = 2.072222, solutie = 2.202932, corectie_rel = 0.118827, eroare_rel = 0.063077
iteratia 2: gref = 2.072222, solutie = 2.120076, corectie_rel = 0.037612, eroare_rel = 0.023093
iteratia 3: gref = 2.072222, solutie = 2.090740, corectie_rel = 0.013837, eroare_rel = 0.008936
iteratia 4: gref = 2.072222, solutie = 2.079534, corectie_rel = 0.005360, eroare_rel = 0.003529
iteratia 5: gref = 2.072222, solutie = 2.075132, corectie_rel = 0.002117, eroare_rel = 0.001404
iteratia 6: gref = 2.072222, solutie = 2.073384, corectie_rel = 0.000843, eroare_rel = 0.000561

```

8 Concluzii

Intelegerea unor astfel de modele simple este deosebit de importanta pentru intelegerea unor fenomene, marimi, notiuni.

Analiza statica MEC+ES este cea mai simpla analiza cuplata care se poate face si ea este utila pentru tensiunii minime de actionare si a tensiunii de eliberare. Pentru modelul MEC+ES, tensiunea de eliberare are sens numai pentru microcomutatoarele capacitive.

9 Tema

1. Rezolvati ecuatia (32) folosind metoda Newton pentru o tensiune mai mica decat tensiunea minima de actionare. (Indicatie: trebuie sa implementati o procedura Newton pentru rezolvarea unei ecuatii algebrice neliniare.)
2. Rezolvati ecuatia (32) folosind functia Matlab fzero.
3. Rezolvati sistemul de ecuatii (30)-(31) folosind metoda Newton. (Indicatie: trebuie sa implementati o procedura Newton pentru rezolvarea unui sistem de doua ecuatii algebrice neliniare cu doua necunoscute: g si F).
4. Rezolvati sistemul (30)-(31) folosind functia Matlab fsolve.
5. Comentati convergenta diferitelor proceduri numerice folosite si ilustrati comentariile cu teste numerice. (Indicatie: reprezentati pe acelasi grafic dependenta erorii in functie iteratie pentru metodele implementate: cuplaj tare (Newton – ecuatie, Newton – sistem, fzero, fsolve) si cuplaj slab. Pentru a calcula eroarea folositi solutia analitica).
6. Redactati un raport relevant si incarcati-l pe moodle.

10 Referinte

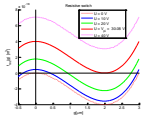
[Ioan12] Modelare multifizica - raport intern ToMeMS, 2012.

[Rebeiz03] Gabriel M. Rebeiz, RF MEMS: Theory, Design, and Technology. 2003 John Wiley & Sons, ISBN: 0-471-20169-3.

11 Anexe

11.1 Cod Matlab: Dependenta functiei neliniare f_{rez} de distanta dintre armaturi, pentru diferite valori ale tensiunii aplicate

Codul cu care a fost desenata Fig. 9. Dependenta functiei neliniare f_{rez} de distanta dintre armaturi, pentru diferite valori ale tensiunii aplicate.



```
function dependenta_f_de_g_cazul_rezistiv0()
% ToMeMS - toy benchmark - condensator plan paralel, suspendat de un resort
% (cel mai simplu model de comutator rezistiv)
%
% reprezentarea grafica a functiei neliniare
%  $f_{rez}(g) = g^3 - g_0 \cdot g.^2 + \epsilon \cdot A \cdot V_{in}^2 / (2 \cdot k)$ 
% pentru diferite valori ale tensiunii aplicate  $V_{in}$ 
% Gabriela Ciuprina,
g0 = 3e-6; % distanta initiala dintre armaturi [m]
epsilon = 1/(36*pi*1e9); % permitivitatea absoluta a vidului [F/m]
A = 100e-6*100e-6; % aria armaturii [m^2]
k = 10; % constanta elastica a resortului [N/m]
Vin0 = 0;
Vin1 = 10; %  $V < V_{pi}$  (pull-in voltage)
Vin2 = 20; % idem
Vin3 = sqrt(8*k*g0^3/(27*epsilon*A)); %  $V = V_{pi}$ 
Vin4 = 40; %  $V > V_{pi}$ 

left = -g0/6;
right = g0;
nop = 1000;

g = linspace(left,right,nop);
fdeg0 = fdeg(g,g0,epsilon,A,Vin0,k);
fdeg1 = fdeg(g,g0,epsilon,A,Vin1,k);
fdeg2 = fdeg(g,g0,epsilon,A,Vin2,k);
fdeg3 = fdeg(g,g0,epsilon,A,Vin3,k);
fdeg4 = fdeg(g,g0,epsilon,A,Vin4,k);
figure(1); clf; hold on;
gg = g*1e6;
plot(gg,fdeg0,'r','Linewidth',2);
plot(gg,fdeg1,'b','Linewidth',2);
plot(gg,fdeg2,'g','Linewidth',2);
plot(gg,fdeg3,'-r','Linewidth',2);
plot(gg,fdeg4,'m','Linewidth',2);
plot([left*1e6 right*1e6],[0 0], 'k');
```



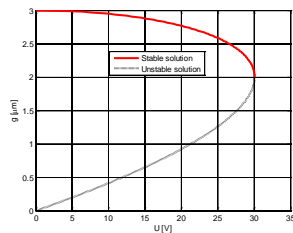
```

plot([0 0],[-4e-18 8e-18],'k');
xlabel('g[\mu m]');
ylabel('f_{rez}(g) [m^3]');
leg{1} = sprintf('U = %d V',Vin0);
leg{2} = sprintf('U = %d V',Vin1);
leg{3} = sprintf('U = %d V',Vin2);
leg{4} = sprintf('U = V_{\pi} = %4.2f V',Vin3);
leg{5} = sprintf('U = %d V',Vin4);
legend(leg);
title('Resistive switch');
end
function [rez] = fddeg(g,g0,epsilon,A,Vin,k)
rez = g.^3 - g0.*g.^2 + epsilon*A*Vin^2/(2*k);
end

```

11.2 Cod Matlab: curba gap-tensiune

Codul cu care a fost desenata Fig. 11. Sunt marcate distinct solutiile stabile de cele instabile.



```

g0 = 3e-6; % distanta initiala dintre armaturi [m]
epsilon = 1/(36*pi*1e9); % permitivitatea absoluta a vidului [F/m]
A = 100e-6*100e-6; % aria armaturii [m^2]
k = 10; % constanta elastica a resortului [N/m]

g2 = linspace(2*g0/3,g0,100);
V2 = sqrt(2*k*g2.^2.*(g0-g2)/epsilon/A);

g1 = linspace(0,2*g0/3,100);
V1 = sqrt(2*k*g1.^2.*(g0-g1)/epsilon/A);

figure(1);
plot(V2,g2*1e6,'r','Linewidth',3);
hold on;
plot(V1,g1*1e6,':k','Linewidth',3);
grid on;

leg{1} = 'Stable solution';

```

```
leg{2} = 'Unstable solution';
```

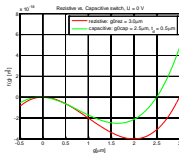
```
legend(leg);
```

```
xlabel('U [V]');
```

```
ylabel('g [μm]');
```

11.3 Cod Matlab: reprezentarea grafica a functiei neliniare - rezistiv vs capacitiv

Acesta este codul cu care a fost reprezentata Fig. 12.



```
function dependenta_f_de_g_rezistiv_vs_capacitiv()
% ToMeMS - toy benchmark - condensator plan paralel, suspendat de un resort
% (cel mai simplu model de switch capacitiv)
%
% comparatie - rezistiv vs capacitiv
%
% reprezentarea grafica a functiei neliniare
% frez(g) = g^3 - g0*g.^2 + epsilon*A*Vin^2/(2*k)
% fdeg(g) = g.*(g + td/epsilon_r).^2 - g0.*(g + td/epsilon_r).^2 +
%         + epsilon*A*Vin^2/(2*k);
% Gabriela Ciuprina

g0 = 3e-6; % distanta gap switch rezistiv

td = 0.5e-6; % grosimea stratului de dielectric [m]
g0_cap = g0 - td; % distanta gap switch capacitiv
epsilon = 1/(36*pi*1e9); % permitivitatea absoluta a vidului [F/m]
epsilon_r = 7.5; % permitivitatea relativa a dielectricului [-]
A = 100e-6*100e-6; % aria armaturii [m^2]
k = 10; % constanta elastica a resortului [N/m]
Vin = 0;

left = -g0/6;
right = g0;
nop = 1000;

g = linspace(left,right,nop);
fdeg_rez = fdeg(g,g0,epsilon,A,Vin,k);
fdeg_cap = fdeg(g,g0_cap,epsilon,A,Vin,k,td,epsilon_r);
figure(1);
clf;
```

```

hold on;
gg = g*1e6;
plot(gg,fdeg_rez,'-r','Linewidth',2);
plot(gg,fdeg_cap,'-g','Linewidth',2);

%grid on;
plot([left*1e6 right*1e6],[0 0],'k');
plot([0 0],[-4e-18 8e-18],'k');
xlabel('g[{\mu}m]');
ylabel('f(g) [m^3]');
leg{1} = sprintf('rezistive: g0rez = %2.1f %s',g0*1e6, '{\mu}m');
leg{2} = sprintf('capacitive: g0cap = %2.1f %s, t_d = %2.1f %s',g0_cap*1e6, '{\mu}m',td*1e6, '{\mu}m');
grid on;
legend(leg);
title(sprintf('Rezistive vs. Capacitive switch, U = %d V',Vin));
end

function [rez] = fcap(g,g0,epsilon,A,Vin,k,td,epsilon_r)
rez = g.*(g + td/epsilon_r).^2 - g0.*(g + td/epsilon_r).^2 + epsilon*A*Vin^2/(2*k);
end

function [rez] = fdeg(g,g0,epsilon,A,Vin,k)
rez = g.^3 - g0.*g.^2 + epsilon*A*Vin^2/(2*k);
end

```