

Algoritmi numerici pentru analiza circuitelor electrice liniare (c.c. și c.a.)

Prof.dr.ing. Gabriela Ciuprina

Universitatea "Politehnica" București, Facultatea de Inginerie Electrică,
Departamentul de Electrotehnică

Suport didactic pentru disciplina *Algoritmi numerici*,
Facultatea de Inginerie Electrică, 2017-2018

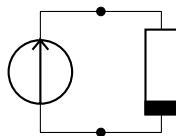
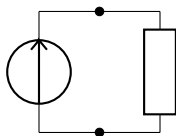
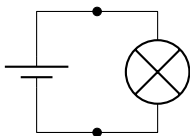
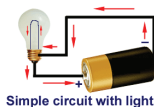
Cuprins

- 1 **Introducere**
 - Modelare
 - Simulare
- 2 **Analiza circuitelor rezistive liniare în c.c.**
 - Formularea problemei
 - Metoda nodală clasică
 - Algoritm - SRT
 - Tratarea SRC
 - Tratarea SICU
 - Metoda nodală modificată
- 3 **Analiza circuitelor liniare în c.a.**
 - Formularea problemei
 - Similitudinea cu c.c.
 - Caracteristici de frecvență

Circuitele electrice sunt modele ale realității

Circuitele electrice

- modele ale realității;
- conțin elemente ideale, obținute prin idealizarea elementelor reale;
- reprezintă o mulțime de elemente ideale conectate între ele pe la borne (terminale).

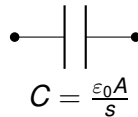
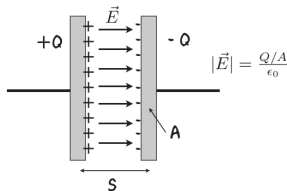
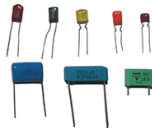


Circuitele electrice sunt alcătuite din elemente ideale

Elementele ideale de circuit electric

- sunt caracterizate de mărimi electrice definite la borne (curenți, tensiuni sau potențiale);
- se definesc funcțional, printr-o relație caracteristică (constitutivă) între mărimile definite la borne.

Modelarea nu este obiectul teoriei circuitelor, ea presupune analiza câmpului electromagnetic.

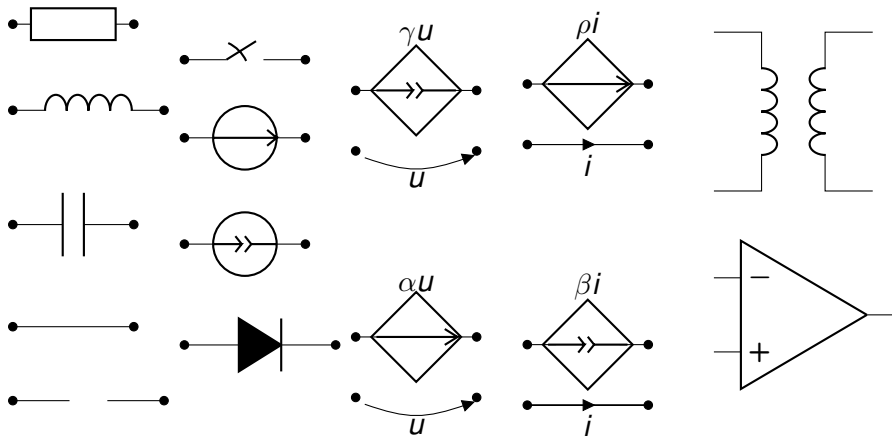


Exemple de elemente ideale

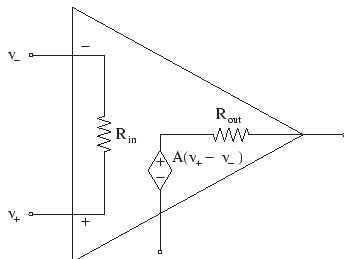
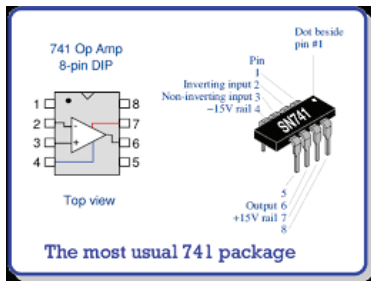
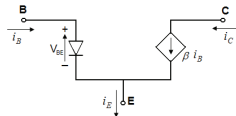
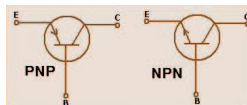
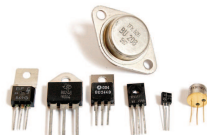
Cele mai frecvent folosite:

- liniare dipolare: R, L, C, conductorul și izolatorul perfect;
- parametrice: K (comutatorul);
- neliniare rezistive : SIT, SIC, DP;
- liniare multipolare: SICU, SUCI, SUCU, SICI, AOP, M;
- neliniare multipolare: AOPn.

Exemple de elemente ideale



Modelarea componentelor din circuitele reale



Determinarea răspunsului sub acțiunea unei excitații

Simulare = **simulare numerică** (cu ajutorul calculatorului)

Simularea

- determinarea mărimilor de interes (tensiuni, curenți) din circuit;
- determinarea răspunsului sub acțiunea unui semnal de excitație cunoscut.

Determinarea răspunsului sub acțiunea unei excitații

O simulare făcută cu succes presupune

- **buna formulare a circuitului** (soluția să existe și să fie unică); este echivalentă cu buna formulare a problemei matematice asociate;
- conceperea sau alegerea unui **algoritm numeric robust** pentru rezolvare.

Algoritmul de rezolvare

Algoritmul potrivit pentru rezolvare depinde de

- **caracteristicile elementelor** de circuit (liniare/nelineare, rezistive/reactive);
- **tipul mărimilor** din circuit (constante - c.c., sinusoidale - c.a., periodice, oarecare).

Tipuri de circuite / probleme matematice

Tip de circuit

- 1 Circuite rezistive liniare/nelineare în c.c.)
- 2 Circuite liniare în regim sinusoidal (c.a.);
- 3 Circuite liniare/nelineare în regim tranzitoriu;
- 4 Circuite liniare/nelineare în regim periodic;
- 5 Oscilatoare (frecvențe de rezonanță.)

Problema matematică

- 1 Sisteme de ec. algebrice liniare/nelineare, în \mathbb{R} ;
- 2 Sisteme de ec. algebrice liniare, în complex.
- 3 Sisteme ODE, lin./nelin. cu condiții inițiale.
- 4 Superpoziție de c.a./ODE cu condiții de periodicitate.
- 5 Calcul de valori proprii (analiza modală).

Scopul acestui curs

Întelegerea:

- modului în care se dezvoltă **instrumentele software** pentru analiza circuitelor electrice;
- importanței **bunei formulări a problemei** (circuitului) ce trebuie rezolvată;
- modului în care se **generează automat** sistemele de rezolvat;
- faptului că fundamentul simulării numerice a circuitelor electrice îl constituie disciplina **Metode numerice** ⇒ **Algoritmi**.

Problema fundamentală

Conțin: rezistoare (R), surse ideale de tensiune (SIT) și curent (SIC), surse comandate liniar (SUCU, SUCI, SICU, SUCI).

Problema fundamentală a analizei acestor circuite

Se dau:

- topologia circuitului (schemă/tabel de descriere (netlist)/matrice de incidență sau apartenență);
- valorile parametrilor (rezistențele, valorile surselor).

Se cer:

- curenții și tensiunile din fiecare latură;
- puteri.

Condiții de bună formulare

Teoreme

Topologice:

- Pentru ca circuitul să fie bine formulat **este necesar să existe un arbore normal**;
- Dacă circuitul nu are surse comandate și toate rezistoarele sunt strict pozitive, atunci este necesar și suficient să existe un arbore normal.

Algebrice:

- Pentru ca circuitul să fie bine formulat **este necesar și suficient ca matricea sistemului** de ecuații algebrice liniare, asamblat printr-o metodă sistematică **să fie nesingulară**.

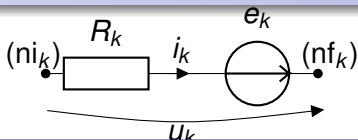
Q1: Ce este un arbore normal?

Metode de rezolvare sistematice

- metoda ecuațiilor Kirchhoff :(
 - metoda potențialelor nodurilor :) (dacă nu sunt surse comandate matricea coeficienților este simetrică și diagonal dominantă)
 - metoda curenților ciclici :| (dacă nu sunt surse comandate matricea este simetrică, necesită definirea unui sistem de bucle independente convenabil ales)
- ⇒ metoda potențialelor nodurilor ("*tehnica nodală*")

Tratarea SRT

Laturi standard:



Formularea problemei

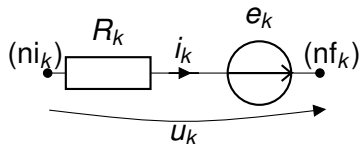
Se dau:

- topologia: $N, L, (ni_k, nf_k, k = 1, \dots, L)$;
- toate rezistențele $R_k, k = 1, \dots, L$, presupuse nenule,
- toate t.e.m. $e_k, k = 1, \dots, L$

Se cer:

- $u_k, k = 1, \dots, L$
- $i_k, k = 1, \dots, L$
- puterea consumată și puterea generată în circuit.

Ecuatii



Kirchhoff clasic:

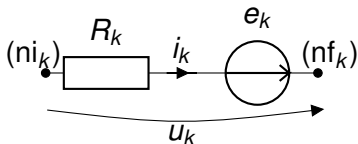
$$\sum_{k \in (n)}^A i_k = 0, \quad n = 1, \dots, N - 1, \quad (1)$$

$$\sum_{k \in [b]}^A u_k = 0, \quad b = 1, \dots, L - N + 1, \quad (2)$$

$$u_k = R_k i_k - e_k, \quad k = 1, \dots, L, \quad (3)$$

2L ecuații cu 2L necunoscute

Necunoscute



Schimbare de variabilă - necunoscutele sunt:

$$v_k, k = 1, \dots, N, \quad v_N = 0 \text{ (prin convenție)}$$

Kirchhoff II:

$$\sum_{k \in [b]}^A u_k = 0, \quad b = 1, \dots, L - N + 1, \quad (4)$$

\Leftrightarrow

$$u_k = v_{ni_k} - v_{nf_k}, \quad k = 1, \dots, L. \quad (5)$$

Notății

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= [u_1 \ u_2 \ \dots \ u_L]^T \in \mathbb{R}^{L \times 1} \\ \mathbf{i} &= [i_1 \ i_2 \ \dots \ i_L]^T \in \mathbb{R}^{L \times 1} \\ \mathbf{v} &= [v_1 \ v_2 \ \dots \ v_{N-1}]^T \in \mathbb{R}^{N-1 \times 1} \\ \mathbf{e} &= [e_1 \ e_2 \ \dots \ e_L]^T \in \mathbb{R}^{L \times 1} \\ \mathbf{R} &= \text{diag}([R_1 \ R_2 \ \dots \ R_L]) \in \mathbb{R}^{L \times L}\end{aligned}\tag{6}$$

Kirchhoff I:

$$\mathbf{A}\mathbf{i} = \mathbf{0},\tag{7}$$

$\mathbf{A} = (a_{ij})_{i=1, N-1; j=1, L}$ este **matricea incidențelor laturi-noduri** - matrice topologică, $(N-1) \times L$

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{dacă nodul } i \text{ nu aparține laturii } j; \\ +1 & \text{dacă nodul } i \text{ este nod inițial pentru latura } j; \\ -1 & \text{dacă nodul } i \text{ este nod final pentru latura } j. \end{cases}$$

Ecuatii scrise compact

Kirchhoff I (KCL):

$$\mathbf{A}\mathbf{i} = \mathbf{0}, \quad (8)$$

Kirchhoff II (KVL):

$$\mathbf{u} = \mathbf{A}^T \mathbf{v}, \quad (9)$$

Joubert (relații constitutive):

$$\mathbf{u} = \mathbf{R}\mathbf{i} - \mathbf{e}. \quad (10)$$

Dacă \mathbf{R} este inversabilă ($R_k \neq 0, \forall k = 1, L$)

$$\mathbf{i} = \mathbf{R}^{-1}(\mathbf{u} + \mathbf{e}). \quad (11)$$

$$\mathbf{A}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{A}^T \mathbf{v} = -\mathbf{A}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{e}. \quad (12)$$

$$\mathbf{G}_n \mathbf{v} = \mathbf{j}_n. \quad (13)$$

Sistem de ecuații

$$\mathbf{G}_n \mathbf{v} = \mathbf{j}_n. \quad (14)$$

\mathbf{G}_n conductanțe nodale; \mathbf{j}_n injecții de curent în noduri.

$$\mathbf{G}_n = \mathbf{A} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{A}^T \in \mathbb{R}^{(N-1) \times (N-1)} \quad (15)$$

$$G_{nii} = \sum_{k \in (i)} \frac{1}{R_k}, \quad G_{nij} = - \sum_{k \in (i); k \in (j)} \frac{1}{R_k} \quad \text{pentru } i \neq j.$$

$$\mathbf{j}_n = -\mathbf{A} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{e} \in \mathbb{R}^{(N-1) \times 1} \quad (16)$$

$$j_{nk} = \sum_{m \in (k)}^A \frac{e_m}{R_m}$$

Proprietățile matricei \mathbf{G}_n

\mathbf{G}_n : simetrică, diagonal dominantă și pozitiv definită dacă rezistențele sunt pozitive

$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ este pozitiv definită dacă ea este simetrică și dacă $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} > 0$ pentru orice vector real, nenul $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$.

$$\mathbf{R}^{-1} = \text{diag}([1/R_1 \quad 1/R_2 \quad \dots \quad 1/R_L]). \quad (17)$$

Simetria:

$$\mathbf{G}_n^T = (\mathbf{A} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{A}^T)^T = (\mathbf{A}^T)^T (\mathbf{R}^{-1})^T (\mathbf{A})^T = \mathbf{A} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{A}^T = \mathbf{G}_n$$

Pozitiv definire: Fie \mathbf{x} vector coloană arbitrar, nenul.

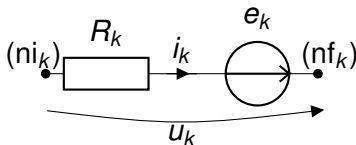
$$\mathbf{x}^T \mathbf{G}_n \mathbf{x} = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{x} = \mathbf{y}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{y} = \sum_{k=1}^L \frac{y_k^2}{R_k} > 0,$$

unde $\mathbf{y} = \mathbf{A}^T \mathbf{x}$ are componentele $y_k, k = 1, \dots, L$.

Etapele algoritmului

- **etapa de preprocesare** în care se descrie problema și se assemblează sistemul de ecuații de rezolvat;
- **etapa de rezolvare** în care se apelează o procedură propriu-zisă de rezolvare a sistemului de ecuații rezultat ("solver");
- **etapa de postprocesare** în care se calculează alte mărimi de interes.

Structuri de date



; declaratii date - varianta A

intreg N

intreg L

tablou intreg $ni[L]$

tablou intreg $nf[L]$

tablou real $R[L]$

tablou real $e[L]$

; număr de noduri

; număr de laturi

; noduri inițiale ale laturilor

; noduri finale ale laturilor

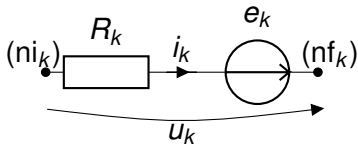
; rezistențe

; tensiuni electromotoare

În vederea obținerii unui algoritm simplu, vom presupune că:

- sensul de referință al curentului unei laturi este identic cu cel al t.e.m de pe latură;
- toate laturile sunt orientate cf. regulii de la receptoare.

Structuri de date



Se recomandă agregarea datelor:

; declarații date - varianta B

înregistrare circuit

<u>întreg</u> N	; număr de noduri
<u>întreg</u> L	; număr de laturi
<u>tablou</u> <u>întreg</u> $ni[L]$; noduri inițiale ale laturilor
<u>tablou</u> <u>întreg</u> $nf[L]$; noduri finale ale laturilor
<u>tablou</u> <u>real</u> $R[L]$; rezistențe
<u>tablou</u> <u>real</u> $e[L]$; tensiuni electromotoare

•

Matrice rare

G_n și j_n sunt foarte rare.

Exemplu:

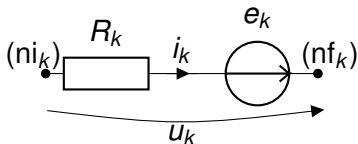
dacă pp. 4 laturi care concură la un nod, atunci densitatea matricei

$$d = 5n/n^2 = 5/n, \text{ (pentru } n \approx 1000 \Rightarrow d = 0.5 \%).$$

Pentru simplitate:

```
; declarații variabile utile  
tablou real Gn[N, N] ; stocată rar  
tablou real jn[N] ; stocat rar  
tablou real v[N] ; vectorul potențialelor
```

Citire date



```
funcție citire_date_B ()  
; declarații
```

```
...
```

```
citește circuit.N, circuit.L
```

```
pentru k = 1, circuit.L
```

```
    citește circuit.ni_k, circuit.nf_k
```

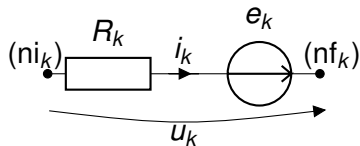
```
    citește circuit.R_k, circuit.e_k
```

```
•
```

```
întoarce circuit
```

Asamblarea sistemului de ecuații

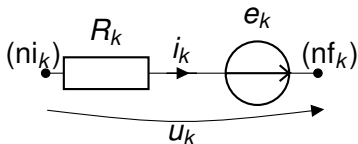
Orientată pe laturi:



	ni_k				nf_k					
ni_k	*	*	*	*	*	*	*	*	ni_k	*
	*	$+1/R_k$	*	*	$-1/R_k$	*	*	*	ni_k	$-e_k/R_k$
	*	*	*	*	*	*	*	*		*
nf_k	*	*	*	*	*	*	*	*	nf_k	*
	*	$-1/R_k$	*	*	$+1/R_k$	*	*	*	nf_k	$+e_k/R_k$
	*	*	*	*	*	*	*	*		*
	*	*	*	*	*	*	*	*		*

Contribuția unei laturi k la matricea conductanțelor nodale (stânga) și la vectorul injecțiilor de curent (dreapta).

Preprocesare



procedură nodalRE_v1 (circuit, Gn, t)

; asamblează sistemul de ecuații pentru un circuit

; cu laturi de tip R,E folosind tehnica nodală

; parametri de intrare:

; circuit - structură de date ce descrie circuitul

; parametri de ieșire:

; Gn - matricea conductanțelor nodale și

; jn - vectorul injecțiilor de curent

; declarații

....

L = circuit.L ; pentru simplificarea scrierii algoritmului

N = circuit.N

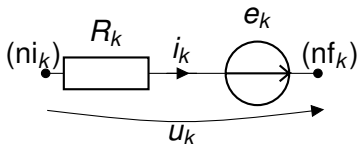
ni = circuit.ni

nf = circuit.nf

R = circuit.R

e = circuit.e

Preprocesare



procedură nodalRE_v1 (circuit, Gn, jn)

....

Gn = 0

jn = 0

; assemblează sistem

pentru $k = 1, L$

$i = ni_k$

$j = nf_k$

$Gn_{ii} = Gn_{ii} + 1/R_k$

$Gn_{jj} = Gn_{jj} + 1/R_k$

$Gn_{ij} = Gn_{ij} - 1/R_k$

$Gn_{ji} = Gn_{ji} - 1/R_k$

$jn_i = jn_i - e_k/R_k$

$jn_j = jn_j + e_k/R_k$

•

retur

; parcurge laturi

; nodul inițial al laturii k

; nodul final al laturii k

Preprocesare

Observații:

- am folosit pseudocod simplificat pentru a scrie anularea componentelor

Atenție! varianta

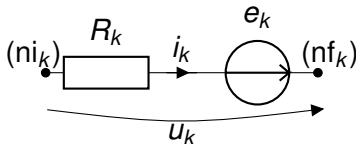
pentru $i = 1, N$
pentru $j = 1, N$
 $G_{ij} = 0$

-
-

scrisă pentru "instrucțiunea" $\mathbf{Gn} = \mathbf{0}$ va umple complet matricea \mathbf{Gn} .

- pentru a evita repetarea unor calcule, se pot memora valorile $1/R_k$ și e_k/R_k .

Preprocesare - varianta a II-a



procedură nodalRE_v2 (circuit, G_n , j_n)

....

; anulează componentele:

$\mathbf{A} = \mathbf{0}$; matricei incidente laturi noduri

$\mathbf{G} = \mathbf{0}$; matricei diagonale \mathbf{R}^{-1}

; assemblează sistem

pentru $k = 1, L$; parcurge laturi

$i = ni_k$; nodul inițial al laturii k

$j = nf_k$; nodul final al laturii k

$A_{ik} = -1$

$A_{jk} = +1$

$G_{kk} = 1/R_k$

•

$\mathbf{G}_n = \mathbf{A} * \mathbf{G} * \mathbf{A}^T$; apel proceduri speciale pentru matrice rare

$\mathbf{j}_n = -\mathbf{A} * \mathbf{G} * \mathbf{e}$

retur

Rezolvare

- Sistemul asamblat are dimensiunea $N \times N$, nodul de referință nefiind tratat special.
- Sistemul de rezolvat trebuie să aibă dimensiunea $N - 1$.
- După rezolvare trebuie adăugată o componentă în plus vectorului potențialelor: $v_N = 0$.

Exemplu:

Gauss ($N - 1, G, t, v$)

$$v_N = 0$$

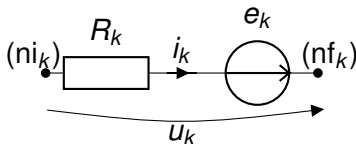
Q2: Cum implementați această idee în Matlab/Octave ?

Rezolvare

Metode posibile de rezolvare:

- **directe** (Gauss, factorizare) - nu introduc erori de trunchiere, dar matricele se umple în cursul algoritmului;
- **iterative** (Jacobi, Gauss-Seidel, SOR) - matricele își păstrează gradul de raritate, dar apar erori de trunchiere și eventuale probleme de convergență;
- **semiiterative** (gradienți conjugați, GMRES, etc) - avantajoase dacă matricea sistemului este simetrică și pozitiv definită (dacă nu există surse comandate).

Postprocesare



procedură postprocesare_circuitRE (circuit, v)

```
...
Pc = 0 ; puterea consumată
Pg = 0 ; puterea generată
pentru k = 1, L ; parcurge laturi
    u = vnik - vnfk ; tensiunea laturii
    c = (u + ek) / Rk ; curentul prin latură
    scrie "Latura" k "are tensiunea" u "și curentul" c
    Pc = Pc + Rkc2 ; adaugă contribuția laturii la Pc
    Pg = Pg + ekc ; adaugă contribuția laturii la Pg
```

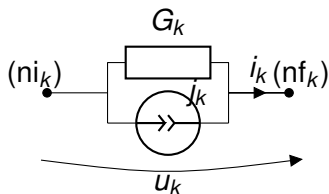
scrie Pc, Pg

retur

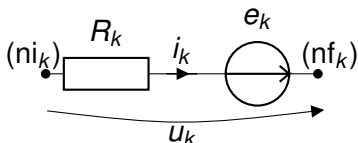
Q3: Cum implementați postprocesarea în Matlab/Octave folosind operații cu matrice?

Tratarea surselor reale de curent

Sursele reale de curent (SRC)



$G_k \neq 0$ se pot echivala în laturi de tip SRT



$R_k = 1/G_k$ și $e_k = j_k/G_k$ Algoritmul se extinde f. ușor.

Tratarea surselor reale de curent

În general, dacă laturile sunt de tip SRT sau SRC:

$$\begin{cases} \mathbf{A}\mathbf{i} = \mathbf{0} \\ \mathbf{u} = \mathbf{A}^T\mathbf{v} \\ \mathbf{i} = \mathcal{Y}\mathbf{u} + \mathbf{j} \end{cases} \Rightarrow \mathbf{A}(\mathcal{Y}\mathbf{u} + \mathbf{j}) = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{A}\mathcal{Y}\mathbf{A}^T\mathbf{v} = -\mathbf{A}\mathbf{j}. \quad (18)$$

SRC: $\mathcal{Y}_k = G_k$. SRT: $\mathcal{Y}_k = 1/R_k$. $j_k = e_k/R_k$

$$\mathcal{Y}_n = \mathbf{A}\mathcal{Y}\mathbf{A}^T \quad (19)$$

este operatorul matriceal al admitanțelor nodale.

$$\mathbf{j}_n = -\mathbf{A}\mathbf{j} \quad (20)$$

este vectorul termenilor liberi ("injecții de curent în noduri").

$$\mathcal{Y}_n\mathbf{v} = \mathbf{j}_n. \quad (21)$$

Tratarea surselor de curent comandate în tensiune

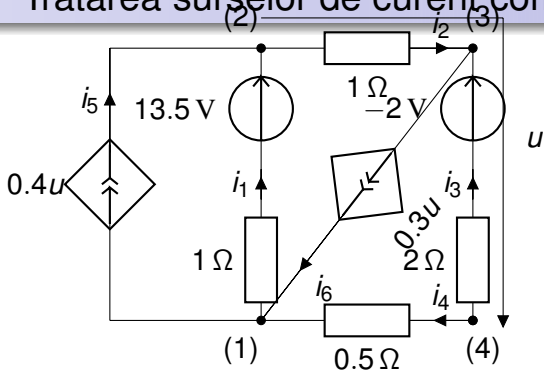
Metoda nodală = metoda în care **necunoscutele sunt numai potențialele nodurilor**.

- Metoda nodală permite și tratarea SICU.
- Matricea își pierde proprietățile de simetrie (și deci pozitiv definirea).

Structurile de date trebuie adaptate.

- SRC e caracterizată de
 - G_k (conductanța laturii);
 - j_k (curentul electromotor).
- **SICU e caracterizată de**
 - γ_k (conductanță de transfer);
 - nci_k, ncf_k (noduri care indică tensiunea de comandă).

Tratarea surselor de curent comandate în tensiune



k	tip	ni_k	nf_k	G_k [S]	j_k [A]	γ_k [S]	nci_k	ncf_k
1	SRC	1	2	1	13.5	-	-	-
2	SRC	2	3	1	0	-	-	-
3	SRC	4	3	0.5	-1	-	-	-
4	SRC	4	1	2	0	-	-	-
5	SICU	1	2	-	-	0.4	2	4
6	SICU	3	1	-	-	0.3	2	4

Tratarea surselor de curent comandate în tensiune

Vom pp. numerotarea laturilor începând cu SRC.

$$\mathbf{i} = \begin{bmatrix} \mathbf{i}_{\text{src}} \\ \mathbf{i}_{\text{sicu}} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{\text{src}} \\ \mathbf{u}_{\text{sicu}} \end{bmatrix}. \quad (22)$$

Relațiile ce descriu starea circuitului:

$$\begin{cases} \mathbf{A}_{\text{src}} \mathbf{i}_{\text{src}} + \mathbf{A}_{\text{sicu}} \mathbf{i}_{\text{sicu}} = \mathbf{0} \\ \mathbf{u}_{\text{src}} = \mathbf{A}_{\text{src}}^T \mathbf{v} \\ \mathbf{u}_{\text{sicu}} = \mathbf{A}_{\text{sicu}}^T \mathbf{v} \\ \mathbf{i}_{\text{src}} = \mathbf{G}_{\text{src}} \mathbf{u}_{\text{src}} + \mathbf{j}_{\text{src}} \\ \mathbf{i}_{\text{sicu}} = \gamma \mathbf{S}_{\text{sicu}} \mathbf{v} \end{cases} \Rightarrow \mathbf{A}_{\text{src}} (\mathbf{G}_{\text{src}} \mathbf{u}_{\text{src}} + \mathbf{j}_{\text{src}}) + \mathbf{A}_{\text{sicu}} \gamma \mathbf{S}_{\text{sicu}} \mathbf{v} = \mathbf{0},$$

unde $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{\text{src}} & \mathbf{A}_{\text{sicu}} \end{bmatrix}$. Ecuația de rezolvat:

$$(\mathbf{A}_{\text{src}} \mathbf{G}_{\text{src}} \mathbf{A}_{\text{src}}^T + \mathbf{A}_{\text{sicu}} \gamma \mathbf{S}_{\text{sicu}}) \mathbf{v} = -\mathbf{A}_{\text{src}} \mathbf{j}_{\text{src}}, \quad (23)$$

Tratarea surselor de curent comandate în tensiune

Pentru exemplul considerat:

$$\mathbf{A}_{\text{src}} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & +1 \end{bmatrix} \end{matrix}, \quad \mathbf{A}_{\text{sicu}} = \begin{matrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \\ 0 & +1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix},$$

$$\mathbf{G}_{\text{src}} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +2 \end{bmatrix} \end{matrix}, \quad \gamma = \begin{matrix} 5 \\ 6 \end{matrix} \begin{bmatrix} 0.4 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix},$$

Tratarea surselor de curent comandate în tensiune

Pentru exemplul considerat:

$$\mathbf{S}_{\text{sicu}} = \begin{matrix} 5 \\ 6 \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 & +1 & 0 & -1 \\ 0 & +1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{j}_{\text{src}} = \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \begin{bmatrix} 13.5 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

unde cifrele mici indică indicii corespunzători de laturi (cu albastru) sau de noduri (cu roșu).

Tratarea surselor de curent comandate în tensiune

Pentru exemplul simplu considerat:

$$\begin{bmatrix} +1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ștampila laturii 1

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ștampila laturii 2

$$\begin{bmatrix} 0 & 0.3 & 0 & -0.3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.3 & 0 & 0.3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ștampila laturii 6

Concluzii - Metoda nodală clasică

- 1 Poate fi aplicată doar în circuitele în care toate laturile sunt controlabile în tensiune.
- 2 Necunoscutele sunt numai potențialele nodurilor.
- 3 Sistemul de rezolvat este de tipul

$$\mathbf{Y}_n \mathbf{v} = \mathbf{j}_n \quad (26)$$

- 4 Dacă circuitul este reciproc (nu conține surse comandate) atunci \mathbf{Y}_n este simetrică și pozitiv definită.
- 5 Algoritmul poate fi conceput folosind operații eficiente cu matrice, caz în care este utilă scrierea detaliată ca:

$$(\mathbf{A}_{\text{src}} \mathbf{G}_{\text{src}} \mathbf{A}_{\text{src}}^T + \mathbf{A}_{\text{sicu}} \boldsymbol{\gamma} \mathbf{S}_{\text{sicu}}) \mathbf{v} = -\mathbf{A}_{\text{src}} \mathbf{j}_{\text{src}}. \quad (27)$$

- 6 Algoritmul poate fi conceput și prin parcurgerea laturilor și adăugarea contribuțiilor la sistem, caz în care este utilă stabilirea ștampilelor fiecărei laturi:

Concluzii - Metoda nodală clasică

	SRC	SICU	SRT	R
\mathbf{Y}_n	$\begin{matrix} ni_k & nf_k \\ ni_k & nf_k \end{matrix} \begin{bmatrix} +G_k & -G_k \\ -G_k & +G_k \end{bmatrix}$	$\begin{matrix} nci_k & ncf_k \\ ni_k & nf_k \end{matrix} \begin{bmatrix} +\gamma_k & -\gamma_k \\ -\gamma_k & +\gamma_k \end{bmatrix}$	$\begin{matrix} ni_k & nf_k \\ ni_k & nf_k \end{matrix} \begin{bmatrix} +\frac{1}{R_k} & -\frac{1}{R_k} \\ -\frac{1}{R_k} & +\frac{1}{R_k} \end{bmatrix}$	$\begin{matrix} ni_k & nf_k \\ ni_k & nf_k \end{matrix} \begin{bmatrix} +\frac{1}{R_k} & -\frac{1}{R_k} \\ -\frac{1}{R_k} & +\frac{1}{R_k} \end{bmatrix}$
\mathbf{j}_n	$\begin{matrix} ni_k \\ nf_k \end{matrix} \begin{bmatrix} -j_k \\ +j_k \end{bmatrix}$	Nu contribuie	$\begin{matrix} ni_k \\ nf_k \end{matrix} \begin{bmatrix} -\frac{e_k}{R_k} \\ +\frac{e_k}{R_k} \end{bmatrix}$	Nu contribuie

Metoda nodală modificată (*Modified Nodal Analysis*)

- 1 Se aplică analizei circuitelor care conțin elemente incompatibile cu tehnica nodală clasică (elemente controlate în curent):
 - surse independente de tensiune (SIT);
 - surse de tensiune comandate (SUCU, SUCI);
 - surse de curent comandate în curent (SICI).
- 2 Sistemul asamblat este extins față de varianta clasică.
- 3 **Necunoscutele metodei nu sunt numai potențialele nodurilor.**

Metoda nodală modificată (*Modified Nodal Analysis*)

Necunoscutele: \mathbf{i}_m

- curenții din sursele ideale de tensiune (SIT);
- curenții porților de ieșire la SUCU;
- curenții porților de ieșire la SUCI;

Ecuțiile MNA au forma:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Y}_n & \mathbf{B}_m \\ \mathbf{A}_m & \mathbf{Z}_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{i}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{j}_n \\ \mathbf{e}_m \end{bmatrix} \quad (28)$$

Metoda nodală modificată (*Modified Nodal Analysis*)

	SIT	SUCU	SUCI	SICI
A_m	$\begin{matrix} ni_k & nf_k \\ k & \begin{bmatrix} +1 & -1 \end{bmatrix} \end{matrix}$	$\begin{matrix} ni_k & nf_k & nci_j & ncf_j \\ k & \begin{bmatrix} +1 & -1 & -\alpha_k & +\alpha_k \end{bmatrix} \end{matrix}$	$\begin{matrix} ni_k & nf_k \\ k & \begin{bmatrix} +1 & -1 \end{bmatrix} \end{matrix}$	Nu contribuie
B_m	$\begin{matrix} k \\ ni_k & \begin{bmatrix} +1 \\ -1 \end{bmatrix} \\ nf_k \end{matrix}$	$\begin{matrix} k \\ ni_k & \begin{bmatrix} +1 \\ -1 \end{bmatrix} \\ nf_k \end{matrix}$	$\begin{matrix} k \\ ni_k & \begin{bmatrix} +1 \\ -1 \end{bmatrix} \\ nf_k \end{matrix}$	$\begin{matrix} id_{s_{sit}} \\ ni_k & \begin{bmatrix} +\beta_k \\ -\beta_k \end{bmatrix} \\ nf_k \end{matrix}$
Z_m	Nu contribuie	Nu contribuie	$\begin{matrix} id_{s_{sit}} \\ id_{s_{suci}} & \begin{bmatrix} -\rho_k \end{bmatrix} \end{matrix}$	Nu contribuie
e_m	$id_{s_{sit}} \begin{bmatrix} +e_k \end{bmatrix}$	Nu contribuie	Nu contribuie	Nu contribuie
j_n	$id_{s_{sit}} \begin{bmatrix} i_k \end{bmatrix}$	$id_{s_{suci}} \begin{bmatrix} i_k \end{bmatrix}$	$id_{s_{suci}} \begin{bmatrix} i_k \end{bmatrix}$	Nu contribuie

Varianta a 2-a: Asamblarea blocurilor de matrice

Exemplu - cazul cu SRC, SIT și SUCU.

- Kirchhoff I:

$$\mathbf{A}_{\text{src}} \mathbf{i}_{\text{src}} + \mathbf{A}_{\text{sit}} \mathbf{i}_{\text{sit}} + \mathbf{A}_{\text{sucu}} \mathbf{i}_{\text{sucu}} = \mathbf{0}, \quad (29)$$

- Kirchhoff II:

$$\mathbf{u}_{\text{src}} = \mathbf{A}_{\text{src}}^T \mathbf{v}, \quad (30)$$

$$\mathbf{u}_{\text{sit}} = \mathbf{A}_{\text{sit}}^T \mathbf{v}, \quad (31)$$

$$\mathbf{u}_{\text{sucu}} = \mathbf{A}_{\text{sucu}}^T \mathbf{v}, \quad (32)$$

- relații constitutive:

$$\mathbf{i}_{\text{src}} = \mathbf{G}_{\text{src}} \mathbf{u}_{\text{src}} + \mathbf{j}_{\text{src}} \quad (33)$$

$$\mathbf{u}_{\text{sit}} = -\mathbf{e}_{\text{sit}}, \quad (34)$$

$$\mathbf{u}_{\text{sucu}} = \alpha \mathbf{S}_{\text{sucu}} \mathbf{v}, \quad (35)$$

Varianta a 2-a: Asamblarea blocurilor de matrice

$N - 1 + L_E + L_{\text{sucu}}$ necunoscute:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{i}_{\text{sit}} \\ \mathbf{i}_{\text{sucu}} \end{bmatrix}. \quad (36)$$

$$\mathbf{M}\mathbf{x} = \mathbf{p} \quad (37)$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{\text{src}} \mathbf{G}_{\text{src}} \mathbf{A}_{\text{src}}^T & \mathbf{A}_{\text{sit}} & \mathbf{A}_{\text{sucu}} \\ & \mathbf{A}_{\text{sit}}^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_{\text{sucu}}^T & -\alpha \mathbf{S}_{\text{sucu}} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (38)$$

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} -\mathbf{A}_{\text{src}} \mathbf{j}_{\text{src}} \\ -\mathbf{e}_{\text{sit}} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (39)$$

Formularea problemei

Conțin:

- rezistoare liniare (R);
- bobine liniare (L);
- bobine liniare cuplate (M);
- condensatoare liniare (C);
- surse ideale de tensiune (SIT);
- surse ideale de curent (SIC);
- surse comandate liniar (SUCU, SUCI, SICU, SUCI).

SIT sau SIC au variații de forma:

$$y(t) = Y\sqrt{2} \sin(\omega t + \varphi). \quad (40)$$

unde ω are aceeași valoare pentru toate mărimile.

Formularea problemei

Problema fundamentală a analizei circuitelor de c.a.

Se dau:

- topologia circuitului (schemă/tabel de descriere (netlist)/matrice de incidență sau apartenență);
- valorile parametrilor (rezistențele, bobinele, cuplajele, condensatoarele, valorile surselor: frecvență, valorile efective, fazele inițiale).

Se cer:

- curenții și tensiunile din fiecare latură (valori efective, faze inițiale);
- puteri (active, reactive, aparente, defazaje).

Similitudinea cu c.c.

- Metoda de analiză se bazează pe reprezentarea în complex.

$$y(t) = Y\sqrt{2} \sin(\omega t + \varphi) \quad \Leftrightarrow \quad \underline{Y} = Y e^{j\varphi}. \quad (41)$$

- Ideea: ecuațiile similare:

	Circuitul de c.c.	Circuitul de c.a.
TK1	$\sum_{k \in (n)}^{(A)} i_k = 0$	$\sum_{k \in (n)}^{(A)} \underline{I}_k = 0$
TK2	$\sum_{k \in [b]}^{(A)} u_k = 0$	$\sum_{k \in [b]}^{(A)} \underline{U}_k = 0$
SRT	$u_k = R_k i_k - e_k$	$\underline{U}_k = \underline{Z}_k \underline{I}_k - \underline{E}_k$
SRC	$i_k = G_k u_k + j_k$	$\underline{I}_k = \underline{Y}_k \underline{U}_k + \underline{J}_k$
SUCI	$e_k = r_{km} i_m$	$\underline{E}_k = \underline{z}_{km} \underline{I}_m$
SICU	$j_k = g_{km} u_m$	$\underline{J}_k = \underline{y}_{km} \underline{U}_m$
SUCU	$e_k = \alpha_{km} u_m$	$\underline{E}_k = \underline{\alpha}_{km} \underline{U}_m$
SICI	$j_k = \beta_{km} i_m$	$\underline{J}_k = \underline{\beta}_{km} \underline{I}_m$

Reprezentarea în complex a elementelor ideale

	Rezistor (R)	Bobină (L)	Condensator (C)
Impedanța complexă \underline{Z}	R	$j\omega L$	$1/(j\omega C)$
Admitanța complexă: \underline{Y}	$1/R$	$1/(j\omega L)$	$j\omega C$
Defazajul: φ	0	$\pi/2$	$-\pi/2$
Impedanța: Z	R	ωL	$1/(\omega C)$
Admitanța: Y	$1/R$	$1/(\omega L)$	ωC
Rezistență de c.a.: R	R	0	0
Reactanța: X	0	ωL	$-1/(\omega C)$
Conductanța de c.a.: G	$1/R$	0	0
Susceptanța: B	0	$-1/(\omega L)$	ωC

Algoritm

Similar cu cel din c.c.:

- în loc de rezistențe se lucrează cu impedanțe complexe;
- parametrii surselor sunt tot valori constante, dar complexe, obținute din reprezentarea în complex a variațiilor care se dau.

Diferențe față de algoritmul din c.c.:

- în etapa de preprocesare: citirea datelor de descriere și reprezentarea lor în complex;
- în etapa de asamblare, apar în plus bobinele cuplate, care contribuie la sistem cu următoarele ștampile:

Algorithm

	Cuplaje
\mathbf{A}_m	$\begin{bmatrix} ni_j & nf_j & ni_k & nf_k \\ +1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & -1 \end{bmatrix}$
\mathbf{B}_m	$\begin{matrix} ni_j & & & \\ & j & & k \\ nf_j & \begin{bmatrix} +1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} & & \\ ni_k & \begin{bmatrix} 0 & +1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} & & \\ nf_k & & & \end{matrix}$
\mathbf{Z}_m	$\begin{matrix} j & & & \\ & j & & k \\ k & \begin{bmatrix} -j\omega L_{jj} & -j\omega L_{jk} \\ -j\omega L_{kj} & -j\omega L_{kk} \end{bmatrix} & & \end{matrix}$
\mathbf{e}_m	Nu contribuie
\mathbf{j}_n	$\begin{bmatrix} i_j \\ i_k \end{bmatrix}$

Caracteristici de frecvență

În multe aplicații practice interesează reprezentarea caracteristicilor de frecvență: comportarea semnalelor de ieșire pentru un interval al frecvențelor semnalelor.

Variante de implementare:

- 1 Se lucrează simbolic, cu parametrul ω și se obțin expresii simbolice ale mărimilor de ieșire care apoi se evaluează numeric;
- 2 Se lucrează numeric, pentru frecvențe din intervalul de interes se rezolvă mai multe probleme de c.a.

Referințe

- [Ciuprina13a] Gabriela Ciuprina - Algoritmi numerici pentru calcule științifice în ingineria electrică , Editura MatrixROM, 2013, pag. 121-141

disponibilă la http://www.lmn.pub.ro/~gabriela/books/AlgNr_MatrixRom2013.pdf

- [Ioan12] Daniel Ioan, Teoremele fundamentale ale circuitelor electrice, Notițe de curs

disponibile online http://www.lmn.pub.ro/~daniel/BazeELTH-6-Teoremele_circuitelor.pdf2012.

- [Chua75] L.O. Chua and P.M. Lin, *Computer-aided analysis of electronic circuits: algorithms and computational techniques*, Prentice-Hall. 1975.

Simulatoare de circuit

Free and Open Source

NgSpice (are și varianta online), GnuCap, CircuitLogix,
LTSpice, MultiSim, TopSpice, MacSpice, Xyce (open source,
SPICE-compatible, high-performance analog circuit simulator)

Licensed/Paid Circuit simulation software

Spectre (Cadence), PSpice, MultiSim, SiMetrix, TINA

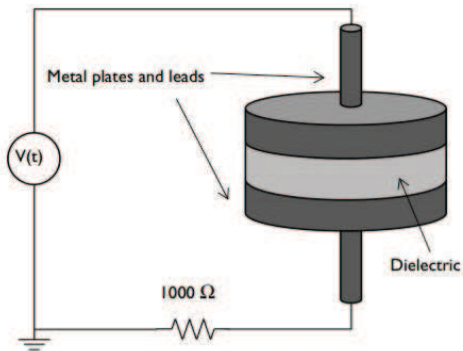
Vedeți și

<http://www.circuitstoday.com/circuit-design-and-simulation-softwares>

https://en.wikipedia.org/wiki/Electronic_circuit_simulation

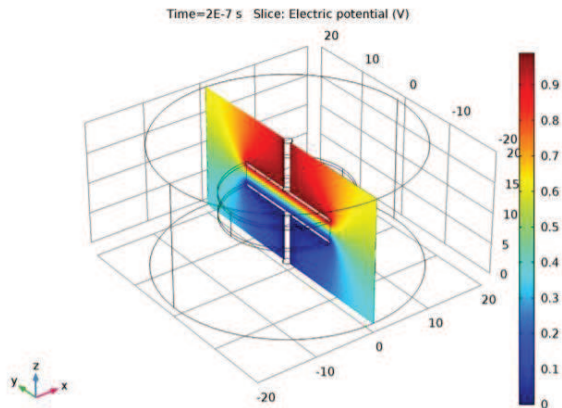
Simulatoare de circuit incluse în programe de câmp

COMSOL - pentru probleme cuplate.



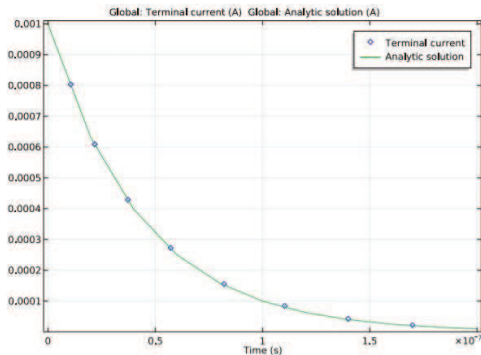
Simulatoare de circuit incluse în programe de câmp

COMSOL - pentru probleme cuplate.



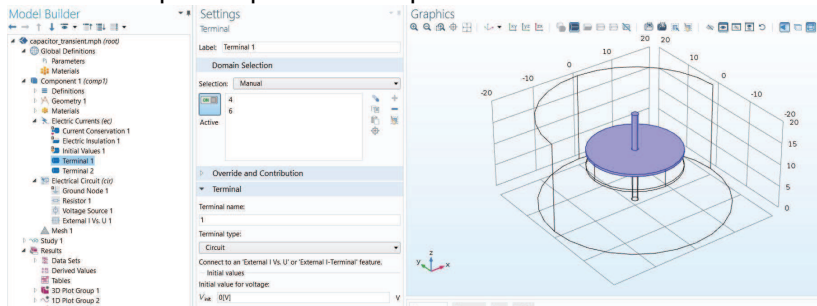
Simulatoare de circuit incluse în programe de câmp

COMSOL - pentru probleme cuplate.



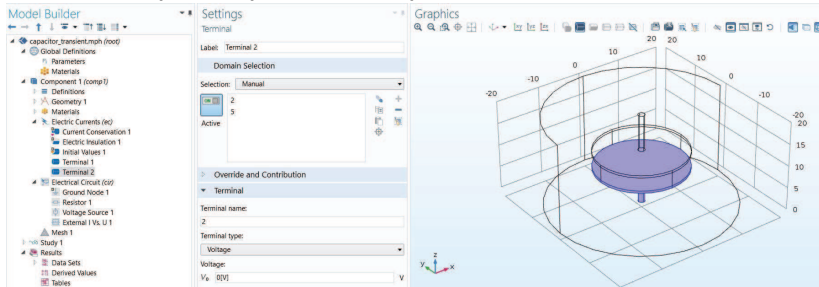
Simulatoare de circuit incluse în programe de câmp

COMSOL - pentru probleme cuplate.



Simulatoare de circuit incluse în programe de câmp

COMSOL - pentru probleme cuplate.



Simulatoare de circuit incluse în programe de câmp

COMSOL - pentru probleme cuplate.

The screenshot displays the COMSOL Model Builder interface. On the left, the 'Model Builder' tree shows a project named 'capacitor_transient.mph (root)'. Under 'Component 1 (comp1)', the 'Electric Circuit (cir)' sub-component is expanded, with 'Ground Node 1' selected. The right-hand 'Settings' panel is titled 'Ground Node' and shows the 'Label' set to 'Ground Node 1'. Below this, the 'Node Connections' section contains a table with one entry:

Label	Node name
p	0

Simulatoare de circuit incluse în programe de câmp

COMSOL - pentru probleme cuplate.

The screenshot displays the COMSOL Model Builder interface. On the left, the 'Model Builder' tree shows a project named 'capacitor_transientLmph (root)'. Under 'Component 1 (comp1)', the 'Electrical Circuit (cir)' node is expanded, showing 'Resistor 1' selected. The right-hand 'Settings' panel is titled 'Resistor' and contains the following fields and sections:

- Label:** Resistor 1
- Identifier:** (collapsed)
- Device name:** R 1
- Node Connections:** A table with columns 'Label' and 'Node names':

Label	Node names
p	1
n	0
- Figure:** A schematic diagram of a resistor with terminals labeled 'p' and 'n'.
- Device Parameters:** Resistance: R 1000[Ω]

Simulatoare de circuit incluse în programe de câmp

COMSOL - pentru probleme cuplate.

The screenshot displays the COMSOL Model Builder interface. On the left, the 'Model Builder' tree shows a project named 'capacitor_transient.mph (root)'. Under 'Component 1 (comp1)', the 'Electrical Circuit (cir)' sub-component is expanded, showing various elements like 'Ground Node 1', 'Resistor 1', and 'Voltage Source 1'. The 'Voltage Source 1' component is selected, and its settings are shown in the 'Settings' panel on the right.

The 'Settings' panel for 'Voltage Source' includes the following sections:

- Label:** Voltage Source 1
- Identifier:** (empty)
- Device name:** V 1
- Node Connections:** A table with columns 'Label' and 'Node names'.

Label	Node names
p	2
n	0
- Figure:** A schematic diagram of a voltage source, represented by a circle with a '+' sign at the top and a '-' sign at the bottom. The top terminal is labeled 'p' and the bottom terminal is labeled 'n'.
- Device Parameters:** 'Source type:' is set to 'DC-source'. 'Voltage:' is set to 'V... 1[V]'.

Simulatoare de circuit incluse în programe de câmp

COMSOL - pentru probleme cuplate.

The screenshot displays the COMSOL Model Builder interface. On the left, the 'Model Builder' tree shows a project named 'capacitor_transient.mph (root)'. Under 'Component 1 (comp1)', the 'Electrical Circuit (cir)' node is expanded, showing various components including 'External I Vs. U 1'. On the right, the 'Settings' window for 'External I Vs. U' is open. It shows the 'Label' as 'External I Vs. U 1'. Under 'Node Connections', there is a table with two rows: 'p' connected to node '2' and 'n' connected to node '1'. Under 'External Device', the description states 'Operates as a voltage source within the electrical circuit.' and the 'Electric potential' is set to 'Terminal voltage (ec/term1)'.

Label	Node names
p	2
n	1