

Algoritmi numerici pentru optimizare

I - Introducere

Prof.dr.ing. Gabriela Ciuprina

Universitatea "Politehnica" Bucureşti, Facultatea de Inginerie Electrică,
Departamentul de Electrotehnică

Suport didactic pentru disciplina *Algoritmi Numerici*, 2017-2018

Cuprins

- 1 Formularea problemei optimizării scalare
 - Formularea problemei
 - Minime globale/locale
 - Restricții
 - Clasificarea problemelor
- 2 Formularea problemei optimizării vectoriale
 - Formularea problemei
 - Soluții în sens Pareto
 - Reformularea ca problemă de optimizare scalară
- 3 Exemple
 - Exemple în inginerie
 - Exemple pentru testarea algoritmilor
- 4 Clasificarea metodelor
 - Metode deterministe
 - Metode stocastice

Formularea problemei

Să se găsească n parametri independenți, notați $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$, pentru care expresia E este minimă, unde

$$E = f(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (1)$$

și $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, este dată.

Pe scurt:

$$(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) = \arg \min f(x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (2)$$

Notări

$$\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \in \Omega. \quad (3)$$

$$\mathbf{x}_{\min} = [x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*]^T \in \Omega \quad (4)$$

$$\mathbf{x}_{\min} = \arg \min f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega$$

$$E_{\min} = f(\mathbf{x}_{\min}).$$

Formularea problemei

$$\mathbf{x}_{\min} = \arg \min f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega \quad (5)$$

$$E_{\min} = f(\mathbf{x}_{\min}). \quad (6)$$

Observații:

- ## 1 Min / Max - limitare ?

$$\max \{ f(\mathbf{x}) | \mathbf{x} \in \Omega \} = -\min \{ -f(\mathbf{x}) | \mathbf{x} \in \Omega \}$$

- ## ② Optimizarea "scalară" - un singur număr înglobează criterii

- de proiectare (\parallel performanță cerută – cea obținută \parallel).
 - de economie (pretul).

$\Rightarrow f$ este numită **funcție obiectiv**, **funcție de cost**, **funcție de merit**, criteriu **de performanță**.

Notes

Minime globale/locale

$$\mathbf{x}_{\min} = \arg \min f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega \quad (7)$$

$$E_{\min} = \min \{ f(\mathbf{x}) | \mathbf{x} \in \Omega \} \quad (8)$$

\mathbf{x}_{\min} este *minim global* dacă

$$E_{\min} \leq f(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \quad (9)$$

- dacă $E_{\min} \leq f(\mathbf{x})$ doar într-o vecinătate a lui \mathbf{x}_{\min} atunci minimul este *local*.
- în practică este dificil de stabilit dacă un minim găsit este local sau global;
- minimul global s-ar putea să nu fie unic.

Restricții

$$\mathbf{x}_{\min} = \arg \min f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega \quad (10)$$

$$E_{\min} = \min \{ f(\mathbf{x}) | \mathbf{x} \in \Omega \} \quad (11)$$

Ω = *domeniu de căutare*

- Dacă $\Omega = \mathbb{R}^n$ atunci optimizarea este *fără restricții de domeniu*
- problemele reale sunt în foarte rare cazuri *fără restricții*;
- analiza metodelor de optimizare *fără restricții* este importantă pentru
 - 1 a înțelege principiile de bază ale optimizării cu restricții;
 - 2 a reformula (dacă este posibil) problemele cu restricții ca probleme *fără restricții*.

Restricții

Tipuri de restricții

- *de domeniu*

$$x_{L,i} \leq x_i \leq x_{U,i} \quad (12)$$

unde $x_{L,i}$ și $x_{U,i}$ sunt limite fixate, $i = 1, \dots, n$;

- *de tip inegalitate*

$$g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq 0 \quad (13)$$

unde $g_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, m$ sunt m funcții date.

- *de tip egalitate*

$$h_j(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \quad (14)$$

unde $h_j : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, p$ sunt p funcții date.

Obs: restricțiile de domeniu pot fi reformulate ca restricții de tip inegalitate.

Notes

Forma generală a problemei minimizării cu restricții

$$\mathbf{x} = ? \quad \min\{f(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in \Omega, g_i(\mathbf{x}) \leq 0, i \in \mathcal{I}; h_j(\mathbf{x}) = 0, j \in \mathcal{J}\} = ?, \quad (15)$$

unde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, \mathcal{I} și \mathcal{J} sunt multimi de indici.

- Domeniul de căutare în care restricțiile sunt satisfăcute = *domeniu admisibil*;
- Optimizarea cu restricții este mult mai dificilă decât optimizarea fără restricții.

Notes

Clasificarea problemelor de optimizare scalară

$$\min\{f(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, g_i(\mathbf{x}) \leq 0, i = 1, m; h_j(\mathbf{x}) = 0, j = 1, p\}$$

- 1 Probleme fără restricții: $\Omega = \mathbb{R}^n, m = 0, p = 0$;
- 2 Probleme doar cu restricții de domeniu: $m = 0, p = 0$;
- 3 Probleme de programare¹ neliniară: f, g_i, h_j neliniare;
- 4 Probleme de programare liniară: f, g_i, h_j liniare;
- 5 Probleme de programare pătratică: f pătratică; g_i, h_j liniare;
- 6 Probleme de optimizare a rețelelor (f, g_i, h_j provin din analiză de grafuri);
- 7 Programare întreagă ($\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^n$);
- 8 Programare mixtă (unii parametri sunt întregi, iar alții sunt reali);

¹"programare" = optimizare

Formularea problemei optimizării vectoriale

Urmăresc satisfacerea simultană a mai multor obiective (e.g.: cost minim, randament maxim, solicitări minime, etc.).

$$\min\{\mathbf{F}(\mathbf{x}) : g_i(\mathbf{x}) \leq 0, i = 1, m; h_j(\mathbf{x}) = 0, j = 1, p\} \quad (16)$$

unde $\mathbf{F} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^q, \Omega \subset \mathbb{R}^n, g_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, h_j : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_q(\mathbf{x})), \quad (17)$$

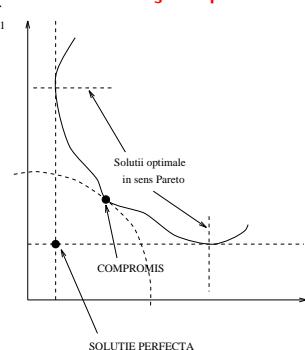
unde $f_k : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, k = 1, q$.

De obicei obiectivele intră în conflict, soluțiile care ar minimiza fiecare obiectiv în parte sunt diferite
⇒ nu există soluție acolo unde toate obiectivele își ating minimul.

Notes

Soluții în sens Pareto

Se caută o soluție optimală în sens Pareto².



O problemă de optimizare în care îmbunătățirea unui obiectiv cauzează degradarea a cel puțin unui alt obiectiv nu are soluție decât în sens optimal Pareto.

Interpretarea geometrică a soluțiilor optimale în sens

Pareto.

²concept introdus în 1896 pentru probleme din economie ▶◀▶▶▶ 11/34

Reformularea ca problemă de optimizare scalară

De multe ori se reduc la o problemă de optimizare scalară

● *Ponderarea obiectivelor*

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^q w_k f_k(\mathbf{x}) \quad (18)$$

w_k sunt ponderi care se stabilesc printr-un proces iterativ.

● *Ponderarea distanțelor*

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^q w_k (f_k^* - f_k(\mathbf{x}))^2 \quad (19)$$

f^* sunt cerințele de atins (minimele funcțiilor obiectiv).

- *Folosirea unui criteriu de tip "minimax"*

$$\min \max |w_k f_k(\mathbf{x})| \quad (20)$$

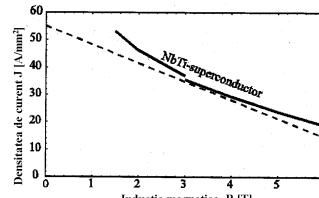
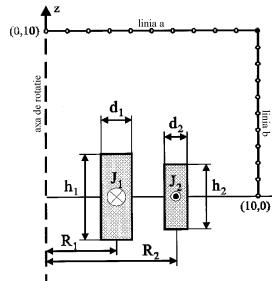
- **Reformularea problemei** - numai unul din obiective se minimizează, celelalte devin restricții suplimentare.

Notes

Exemplul 1

proiectare = optimizare

Ex.1. Optimizarea unui sistem de stocare a energiei (problema TEAM³)



Restricția impusă pentru supraconducto

Dispozitiv SMES cu doi solenoizi

³TEAM (Testing Electromagnetic Analysis Methods) = grup de lucru internațional care își propune să compare programele pentru calculul câmpului electromagnetic, detaliu și formule detaliate se găsesc la <http://www.compumag.org/site/team.html> nr.22

Gabriela Ciuprina, Algoritmi de optimizare, Introducere

Exemplul 1

Să se găsească $(R_1, R_2, h_1/2, h_2/2, d_1, d_2, J_1, J_2)$ având restricțiile:

	R_1 [m]	R_2 [m]	$h_1/2$ [m]	$h_2/2$ [m]	d_1 [m]	d_2 [m]	J_1 [MA/m ²]	J_2 [MA/m ²]
min	1.0	1.8	0.1	0.1	0.1	0.1	10.0	-30.0
max	4.0	5.0	1.8	1.8	0.8	0.8	30.0	-10.0

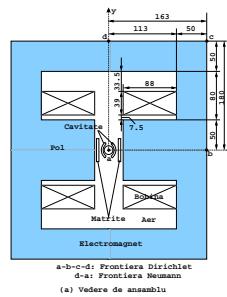
- Energia magnetică stocată să fie $E_{\text{ref}} = 180 \text{ MJ}$;
 - Să fie garantată supraconductibilitatea;
 $|J| \leq (-6.4|\mathbf{B}| + 54.0) \text{ A/mm}^2$.
 - Câmpul de dispersie (măsurat la 10 m de dispozitiv) să fie cât mai mic posibil.

$$f(R_1, R_2, h_1/2, h_2/2, d_1, d_2, J_1, J_2) = \frac{B_{\text{stray}}^2}{B_{\text{norm}}^2} + \frac{|E - E_{\text{ref}}|}{E_{\text{ref}}} \quad (21)$$

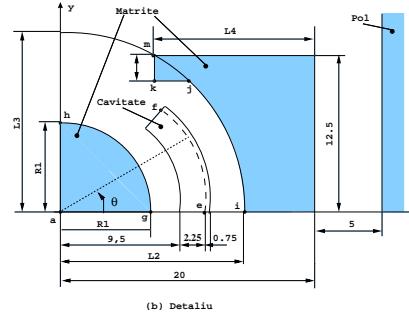
$E_{\text{ref}} = 180 \text{ MJ}$, $B_{\text{norm}} = 2.0 \cdot 10^{-4} \text{ T}$ și $B_{\text{stray}}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{22} |B_{\text{stray}_i}|^2}{22}$.

Exemplul 2

Ex.2. Optimizarea unei mătrițe cu electromagnet folosită pentru orientarea pulberilor magnetice (problema TEAM nr.25)



Matriță cu electromagnet.



Detaliu în zona de interes

Exemplul 2

Să se găsească (R_1, L_2, L_3, L_4) având restricțiile

	R_1 [mm]	L_2 [mm]	L_3 [mm]	L_4 [mm]
min	5	12.6	14	4
max	9.4	18	45	19

- a.i. pentru o solenătie de 4253 A-spiră, câmpul magnetic în cavitate să fie orientat radial:

$$B_x = 0.35 \cos \theta [\text{T}] \quad B_y = 0.35 \sin \theta [\text{T}]$$

Matrița și electromagnetul au curba de magnetizare dată (otel).

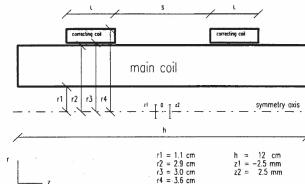
B [T]	0.0	0.11	0.18	0.28	0.35	0.74	0.82	0.91
H [A/m]	0.0	140	178	215	253	391	452	529
B [T]	0.98	1.02	1.08	1.15	1.27	1.32	1.36	1.39
H [A/m]	596	677	774	902	1164	1299	1462	1640
B [T]	1.42	1.47	1.51	1.54	1.56	1.60	1.64	1.72
H [A/m]	1851	2262	2685	3038	3395	4094	4756	7079

$$f(R_1, L_2, L_3, L_4) = \sum_{i=1}^n [(B_{xp_i} - B_{xo_i})^2 + (B_{yp_i} - B_{yo_i})^2] \quad (22)$$

Notes

Exemplul 3

Ex.3. Optimizarea unei configurații de solenoizi (problema Loney⁴)



Secțiune transversală.

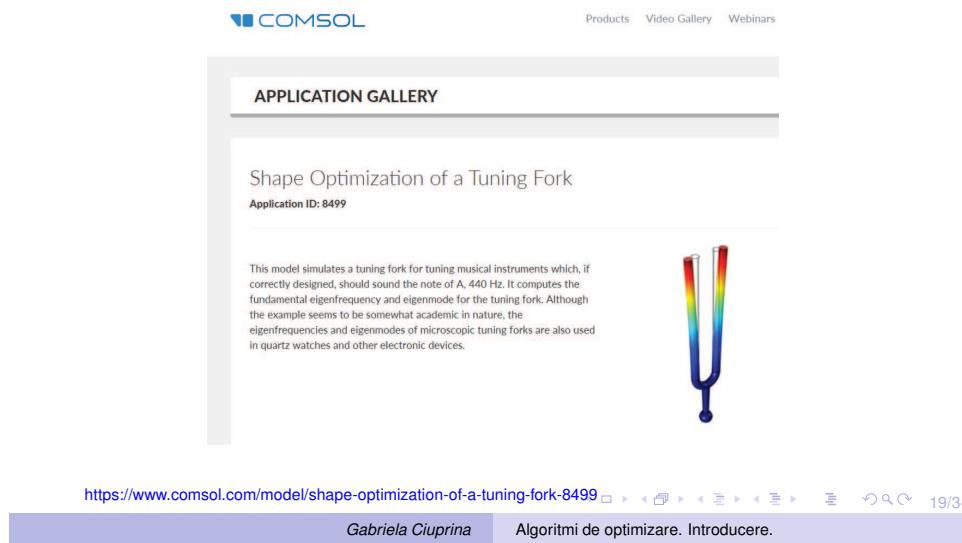
Să se găsească parametrii geometrici (S,L) astfel încât câmpul magnetic în mijlocul solenoidului să fie uniform.

$$f(S, L) = \frac{B_{\max} - B_{\min}}{B_0} \quad (23)$$

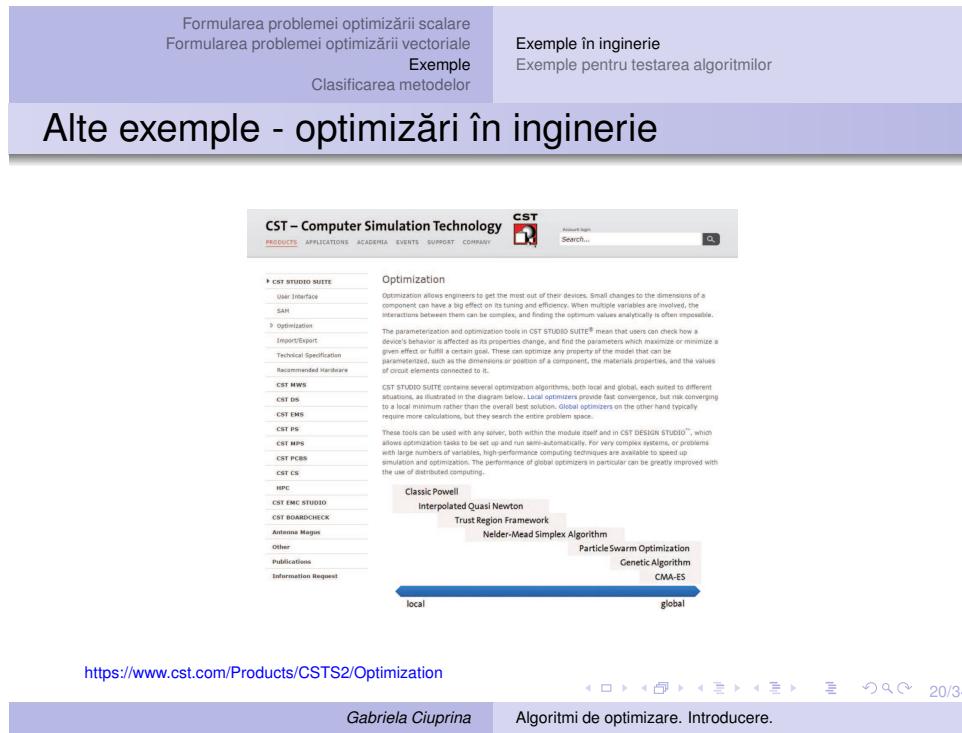
⁴ P. di Barba, A. Gottvald, A. Savini, *Global optimization of Loneyş solenoid: a benchmark problem*. International Journal of Applied Electromagnetics and Mechanics. Vol 4 (1995), pages 273-276. ISSN 0925-2096.  17/34

Alte exemple - optimizări în inginerie

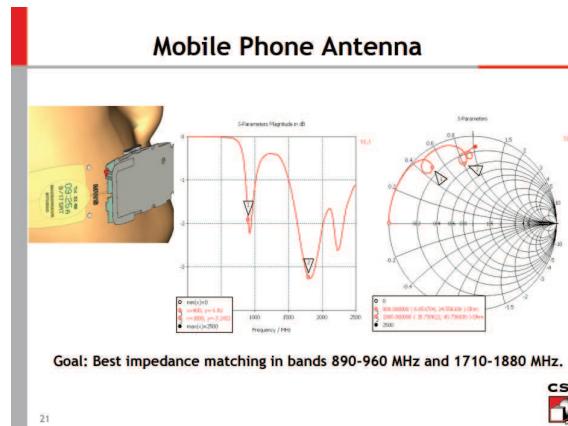
Alte exemple - optimizări în inginerie



Notes



Alte exemple - optimizări în inginerie



https://www.cst.com/content/events/downloads/eugm2011/talk_6-1-4_cst_ugm_2011.pdf

Alte exemple - optimizări în inginerie

OptiNet	
AUTOMATED DESIGN OPTIMIZATION	
<p>OptiNet is an automated design optimization option to MagNet, ElecNet and MagNet-ThermNet coupled together. Using advanced and efficient algorithms, OptiNet can find optimal values for different design variables within the constraints specified.</p> <p>OptiNet's useful features include:</p> <ul style="list-style-type: none"> Continuous-value and discrete-value variables and optimization Evolutionary-based Stochastic search is very efficient, even for a large number of parameters Built-in and customizable scripts for objective functions and constraints Evaluate the impact of variations in the design parameters <p>OptiNet offers an integrated Automated Optimal Design environment compatible with the industrial design process by meeting the following requirements:</p>	
Robust	Independent of the number of design variables, problem type and objective
Global Search Oriented	Identifies the global minimum of an objective function
Derivative-Free	OptiNet avoids errors by using proper functions and not their derivatives
Fast	Highest possible efficiency with freedom to choose the best solution based on time-constraints

<http://www.infolytica.com/en/products/optinet/>

Notes

Notes

Alte exemple - optimizări în inginerie

**infolytica**
corporation

<http://www.infolytica.com/en/applications/ex0123>



Gabriela Ciuprina Algoritmi de optimizare. Introducere

Alte exemple - optimizări în inginerie

The Infolytica logo is located at the top left, featuring a red stylized 'i' icon followed by the company name 'infolytica' in lowercase and 'corporation' in smaller letters below it. To the right is a search bar with a magnifying glass icon. Further right are two blue buttons: 'Your account' and 'Français'. The main content area has a white background. At the top, there are navigation links: 'PRODUCTS ▾', 'APPLICATIONS ▾', 'SUPPORT ▾', 'COMPANY ▾', 'NEWS ▾', and 'CONTACT US'. Below these are three large, bold, black buttons: 'CATEGORIES', 'RELATED EXAMPLES', and 'DOWNLOAD MAGNET MODEL'. To the right of these buttons is a section titled 'Design Optimization of an NDT Sensor Probe' with a sub-section 'SENSORS & NOT WITH MAGNET'. This section contains text about probe design decisions and optimization using OptiNet. Below this is another section with text about sensor probe optimization using a combination of Magnet and OptiNet. On the far right, there are four small thumbnail images showing different views of a probe and its internal components.

<http://www.infolytica.com/en/applications/ex0116>



Gabriela Ciuprina Algoritmi de optimizare. Introducere

Notes

Notes

1

Alte exemple - optimizări în inginerie

 infolytica corporation

SEARCH Your account Français

PRODUCTS APPLICATIONS SUPPORT COMPANY NEWS CONTACT US

CATEGORIES RELATED EXAMPLES DOWNLOAD MAGNET MODEL

Coil Size Optimization – Induction Heating

INDUCTION HEATING WITH MAGNET

In the multiple-coil configuration shown in this figure, the work piece is shown in blue. The coils are shown partially so that the workpiece can be seen). The objective of this optimization is to find the inner radii of the coils in order to obtain a uniform temperature in the upper portion of the workpiece.

The coupled electromagnetic-thermal simulation is a transient thermal solution that, at each time step during the transient process, performs a time-harmonic electromagnetic solution to update the eddy current losses. The workpiece is made of stainless steel and its material properties are non-linear and vary with temperature.

Navigation icons: back, forward, search, etc. 25/34

Gabriela Ciuprina Algoritmi de optimizare. Introducere.

Notes

Alte exemple - optimizări în inginerie

 infolytica corporation

SEARCH Your account Français

PRODUCTS APPLICATIONS SUPPORT COMPANY NEWS CONTACT US

CATEGORIES RELATED EXAMPLES DOWNLOAD OPTINET MODEL

Optimization of a Loudspeaker: Minimal Mass

LOUDSPEAKERS WITH MAGNET

This example demonstrates the use of OptiNet with MagNet for the optimization of a loudspeaker design based on its electromagnetic characteristics. MagNet is used to compute the electromagnetic fields, and OptiNet is used to find the optimum design as specified by the user's requirements.

The loudspeaker model shown here is made of two iron pieces and a permanent magnet. The permanent magnet drives the iron through the iron-air gap. The goal of the optimization is to find a loudspeaker designer that has the minimal mass necessary to produce a flux density of 1.8 Tesla in the air gap.

Navigation icons: back, forward, search, etc. 26/34

Gabriela Ciuprina Algoritmi de optimizare. Introducere.

Notes

Alte exemple - optimizări în inginerie



The screenshot shows the infolytica website interface. In the top left, there's a logo for 'infolytica corporation'. The top navigation bar includes links for 'Your account' and 'Français'. Below the header, there are dropdown menus for 'PRODUCTS', 'APPLICATIONS', 'SUPPORT', 'COMPANY', 'NEWS', and 'CONTACT US'. On the left side, there are two sections: 'CATEGORIES' and 'RELATED EXAMPLES'. The main content area is titled 'SRM Design Optimization' with a subtitle 'MOTORS & GENERATORS WITH MAGNET'. It features a circular diagram of a motor with various segments and a text block explaining the optimization task. At the bottom of the page, there are navigation icons and a page number '27/34'.

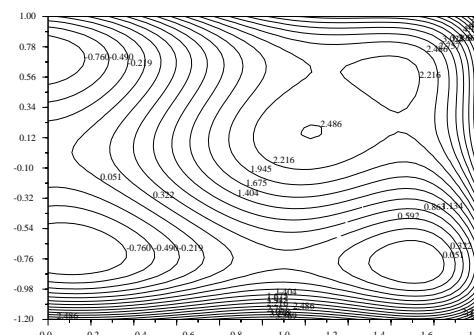
<http://www.infolytica.com/en/applications/ex0132/>

Notes

Exemple simple pentru testarea algoritmilor

Funcția "six-hump camel back" (cămila cu șase cocoase)

$$C(x, y) = \left(4 - 2.1x^2 + \frac{x^4}{3}\right)x^2 + xy + \left(-4 + 4y^2\right)y^2 \quad (24)$$



$-3 \leq x \leq 3$ și
 $-2 \leq y \leq 2$
Un minim global = -1.03163
în două puncte diferite: $(x, y) = (-0.0898, -0.7126)$
și $(0.0898, -0.7126)$.

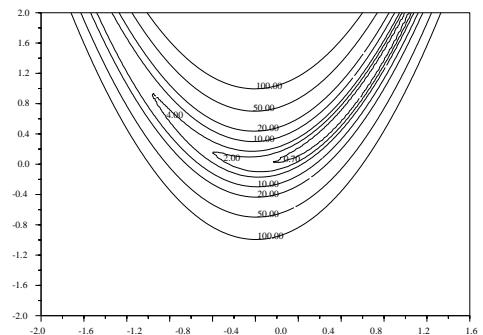
28/34

Notes

Exemple simple pentru testarea algoritmilor

Functia lui Rosenbrock ("functia banană")

$$B(x, y) = 100(y - x^2)^2 + (1 - x)^2 \quad (25)$$

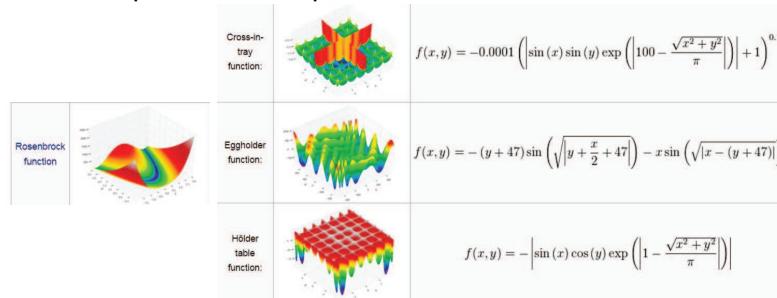


-2.048 \leq x \leq
 2.048 și
 -2.048 \leq y \leq
 2.048
 Un minim global
 egal cu 0 în punctul
 $(x, y) = (1, 1)$.
 Minime locale nu
 există, dar funcția
 are un relief complicații pentru algoritmii de optimizare

A set of small, light-blue navigation icons typically found in presentation software like Beamer. They include symbols for back, forward, search, and table of contents.

Exemple simple pentru testarea algoritmilor

Alte exemple de acest tip https://en.wikipedia.org/wiki/Test_functions_for_optimization



Notes

Clasificarea metodelor

În general, metodele de optimizare sunt iterative.

$$E_0, E_1, \dots, E_k, \dots$$

E_k este valoarea minimă obținută la iterația k .

- Dacă E_k nu scade un număr de iterații, este posibil să se fi atins un minim, dar este imposibil să se precizeze dacă acesta este global sau nu.
 - Nicio tehnică de optimizare nu garantează atingerea unui minim global.

Viteza relativă de convergență = se estimează de obicei prin numărul de evaluări ale funcției obiectiv necesare pentru a reduce valoarea E_k de un anumit număr de ori.

Metode deterministe

I. Deterministe - conduc la aceeași soluție pentru rulări diferite ale programului, dacă pornesc din aceleași condiții inițiale și au aceeași parametri.

- Dezavantaj: găsesc întotdeauna un minim local, dependent de inițializare;
 - Avantaj: efort de calcul mic.

În problemele de optimizare din efortul de calcul se exprimă în număr de evaluări de funcții obiectiv.

Pot fi

- ① **de ordin zero** - necesită doar evaluări de funcții obiectiv;
Ex: metoda căutării simultane; metoda căutării dihotomice; metoda Fibonacci; metoda secțiunii de aur; metoda simplexului descendente (Nelder-Mead); metoda Powell, etc.
 - ② **de ordin superior (1,2)** - necesită și evaluări ale derivatelor funcției obiectiv.

Notes

Metode stocastice

II. Stocastice - au un caracter aleator, nu conduc la aceeași soluție, chiar dacă pornesc din aceleași condiții initiale și au aceeași parametri;

- Dezavantaj: necesita un efort de calcul foarte mare.
 - Avantaj: au o probabilitate foarte mare de a găsi un minim global.

Ex: metoda căutării aleatoare; algoritmi evoluționisti; algoritmi genetici, optimizare bazată pe rouri de particule (*particle swarm*), colonii de furnici (*ant colony*), călarea simulată (*simulated annealing*), căutare tabu (*tabu search*), etc.

Răsfoiți și https://en.wikipedia.org/wiki/Mathematical_optimization

- [Ciuprina02] G.Ciuprina, D.Ioan, I.Munteanu, M.Rebican, R.Pop, Optimizarea numerica a dispozitivelor electromagnetice, Editura Printech, 2002.
disponibila la <http://www.lmn.pub.ro/~gabriela/books/opt2002.pdf>
 - [Cheney08] Ward Cheney and David Kincaid, *Numerical Mathematics and Computing*, Brooks/Cole publishing Company,2008. (Capitolul 16 - Minimization of functions)