Integrarea numerică

Prof.dr.ing. Gabriela Ciuprina

Universitatea "Politehnica" Bucureşti, Facultatea de Inginerie Electrică

Suport didactic pentru disciplina *Algoritmi Numerici*, 2017-2018

Notes

Cuprins

Notes

Importanţa evaluării integralelor

- Relaţii utile pentru evaluarea unor mărimi:

$$u = \int_C \mathbf{E} \cdot \mathbf{dl} \qquad \varphi = \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{dA} \qquad q = \int_D \rho \, \mathrm{d}v$$

- Rezolvarea ecuaţiilor diferenţiale

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(x(t), f) \quad \Rightarrow \quad x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(x(t'), t') \, \mathrm{d}t'$$

"rezolvare" = "integrare" (în acest context)

Notes

Formularea problemei - cazul cel mai simplu

Se dă funcţia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ (cunoscută prin date sau prin cod)
Se cere evaluarea numerică a integralei definite

$$\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x$$

unde f este presupusă continuă şi mărginită.

Numeric: idei inspirate din matematică.

Notes

Idei de calcul numeric (I)

T. fundamentală a analizei
Dacă f e continuă şi F este o primitivă a ei ($F' = f$) atunci

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

În problemele reale F nu este cunoscută $\Rightarrow$ aplicarea acestei metode este foarte grea / imposibilă.

Notes

Introducere
Integrarea funcţiilor cunoscute prin date
Integrarea funcţiilor cunoscute prin cod
Concluzii
Importanţa evaluării integralelor
Formularea problemei integrării numerice
Idei de calcul numeric

Idei de calcul numeric (I)

T. fundamentală a analizei
Dacă f e continuă şi F este o primitivă a ei ($F' = f$) atunci

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

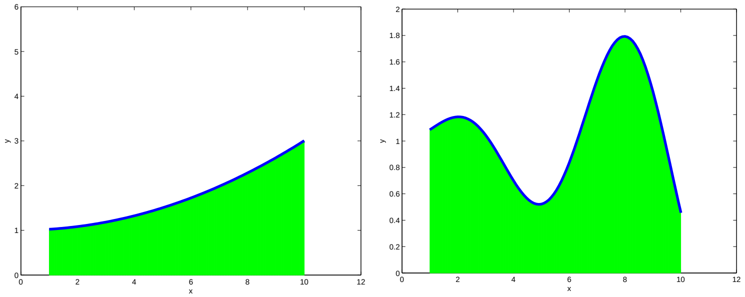
În problemele reale F nu este cunoscută $\Rightarrow$ aplicarea acestei metode este foarte grea / imposibilă.
:(

5/42
Gabriela Ciuprina Integrarea numerică

Notes

Idei de calcul numeric (II)

Semnificaţia geometrică a integralei



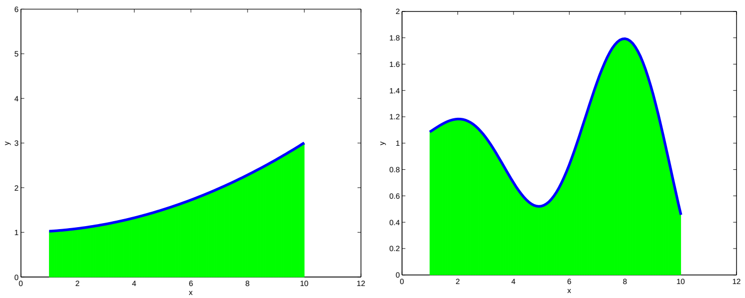
Notes

Introducere
Integrarea funcţiilor cunoscute prin date
Integrarea funcţiilor cunoscute prin cod
Concluzii

Importanţa evaluării integralelor
Formularea problemei integrării numerice
Idei de calcul numeric

Idei de calcul numeric (II)

Semnificaţia geometrică a integralei

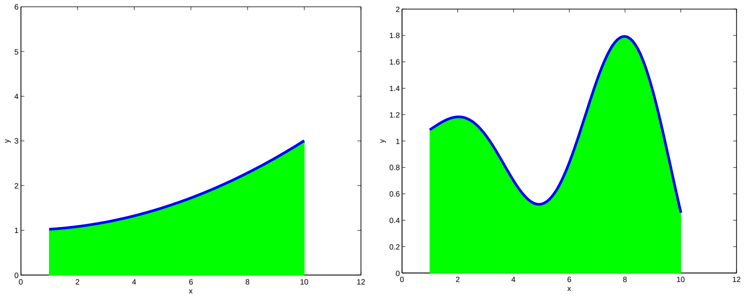


În calculator funcţiile nu au reprezentări continue.

Notes

Idei de calcul numeric (II)

Semnificaţia geometrică a integralei



În calculator funcţiile nu au reprezentări continue.

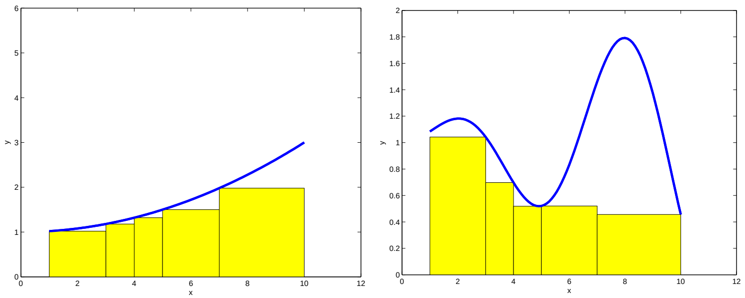
:|

Notes

Idei de calcul numeric (III)

Definiţia integralei folosind sume Darboux

Partiţia $\mathcal{P} : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$

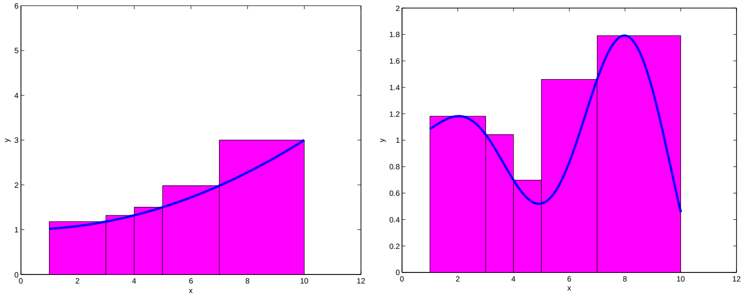


Notes

Idei de calcul numeric (III)

Definiţia integralei folosind sume Darboux

Partiţia $\mathcal{P} : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$



Notes

Introducere
Integrarea funcţiilor cunoscute prin date
Integrarea funcţiilor cunoscute prin cod
Concluzii
Importanţa evaluării integralelor
Formularea problemei integrării numerice
Idei de calcul numeric

Idei de calcul numeric (III)

Definiţia integralei folosind sume Darboux

Partiţia $\mathcal{P} : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$

$m_i = \inf\{f(x) : x_i \leq x \leq x_{i+1}\} \Rightarrow L(f, \mathcal{P}) = \sum_{i=0}^{n-1} m_i (x_{i+1} - x_i)$

$M_i = \sup\{f(x) : x_i \leq x \leq x_{i+1}\} \Rightarrow U(f, \mathcal{P}) = \sum_{i=0}^{n-1} M_i (x_{i+1} - x_i)$

$$L(f, \mathcal{P}) \leq \int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x \leq U(f, \mathcal{P})$$

Dacă $\inf_{\mathcal{P}} U(f, \mathcal{P}) = \sup_{\mathcal{P}} L(f, \mathcal{P})$ atunci această valoare este integrala (Riemann). :)

T. Orice funcţie continuă, mărginită, definită pe un domeniu închis este integrabilă Riemann.

Notes

Idei de calcul numeric (recap.)

Metodele de integrare numerică

- Sunt inspirate de metodele care calculează arii;
- Cea mai simplă metodă - aria e aproximată de o reuniune de dreptunghiuri.
  $f \approx g$, unde g este constantă pe porţiuni şi

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

- Aproximări mai rafinate pentru g pot conduce la rezultate mai bune.

Notes

Idei de calcul numeric

Algoritmii depind de modul în care este definită funcţia:

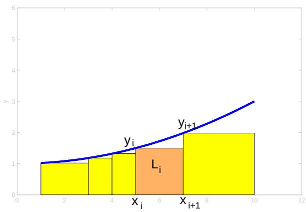
- printr-un tabel de valori

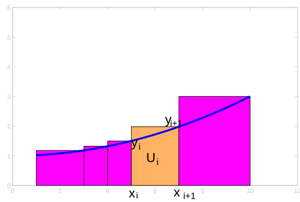
$$\{x_k, y_k = f(x_k)\}, \quad k = 0, n$$

- prin cod
  $f(x)$ poate fi evaluat în orice x din domeniul de definiţie.

Notes

Metoda dreptunghiurilor - Ideea





$$L_i = (x_{i+1} - x_i) * \min(y_i, y_{i+1}) \qquad U_i = (x_{i+1} - x_i) * \max(y_i, y_{i+1})$$

$$L = \sum_{i=0}^{n-1} L_i \qquad U = \sum_{i=0}^{n-1} U_i$$

Notes

Metoda dreptunghiurilor - Algoritm

funcţie integrala_dreptunghi(n,x,y)
; calculează integrala numerică prin metoda dreptunghiurilor
intreg n
tablou real $x[n]$, $y[n]$; tabelul de valori, indici de la 0
. . .
$L = 0$
$U = 0$
pentru $i = 0, n - 1$
    $m_i = \min(y_i, y_{i+1})$
    $M_i = \max(y_i, y_{i+1})$
    $h = x_{i+1} - x_i$
    $L = L + mh$
    $U = U + Mh$
•
val.$L = L$
val.$U = U$
intoarce val

Notes

Metoda dreptunghiurilor - Algoritm

```
funcţie integrala_dreptunghi(n,x,y)
; calculează integrala numerică prin metoda dreptunghiurilor
intreg n
tablou real x[n], y[n]          ; tabelul de valori, indici de la 0
...
L = 0
U = 0
pentru i = 0, n − 1
        m_i = min(y_i, y_{i+1})
        M_i = max(y_i, y_{i+1})
        h = x_{i+1} − x_i
        L = L + mh
        U = U + Mh
•
val.L = L
val.U = U
intoarce val
```

T = O(5n)   M = O(2n)

Notes

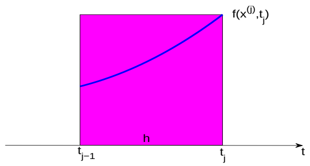
Metoda dreptunghiurilor - Euler

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(x(t), t)$$

Euler implicit:

$$\frac{x^{(j)} - x^{(j-1)}}{h} = f(x^{(j)}, t_j)$$

$$x^{(j)} = x^{(j-1)} + hf(x^{(j)}, t_j)$$



$$\int_{t_{j-1}}^{t_j} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = \int_{t_{j-1}}^{t_j} f(x(t), t)\,\mathrm{d}t$$

$$x(t_j) - x(t_{j-1}) = I$$

$I \approx$ aria dreptunghiului de înălţime coresp. lui t_j

$$x^{(j)} - x^{(j-1)} = hf(x^{(j)}, t_j)$$

Notes

Metoda dreptunghiurilor - Euler

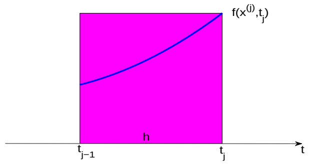
$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(x(t), t)$$

Euler implicit:

$$\frac{x^{(j)} - x^{(j-1)}}{h} = f(x^{(j)}, t_j)$$

$$x^{(j)} = x^{(j-1)} + hf(x^{(j)}, t_j)$$

A "rezolva" ecuaţii diferenţiale
= a "integra" ecuaţii diferenţiale



$$\int_{t_{j-1}}^{t_j} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = \int_{t_{j-1}}^{t_j} f(x(t), t)\,\mathrm{d}t$$

$$x(t_j) - x(t_{j-1}) = I$$

$I \approx$ aria dreptunghiului de înălţime coresp. lui t_j

$$x^{(j)} - x^{(j-1)} = hf(x^{(j)}, t_j)$$

Notes

Metoda dreptunghiurilor - Euler

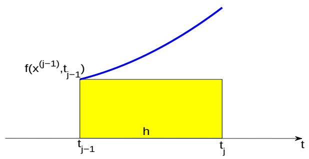
$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(x(t), t)$$

Euler explicit:

$$\frac{x^{(j)} - x^{(j-1)}}{h} = f(x^{(j-1)}, t_{j-1})$$

$$x^{(j)} = x^{(j-1)} + hf(x^{(j-1)}, t_{j-1})$$

A "rezolva" ecuaţii diferenţiale
= a "integra" ecuaţii diferenţiale



$$\int_{t_{j-1}}^{t_j} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = \int_{t_{j-1}}^{t_j} f(x(t), t)\,\mathrm{d}t$$

$$x(t_j) - x(t_{j-1}) = I$$

$I \approx$ aria dreptunghiului de înălţime coresp. lui t_{j-1}

$$x^{(j)} - x^{(j-1)} = hf(x^{(j-1)}, t_{j-1})$$

A "rezolva" ecuaţii diferenţiale = a "integra" ecuaţii diferenţiale

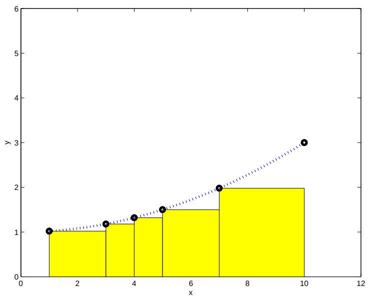
Notes

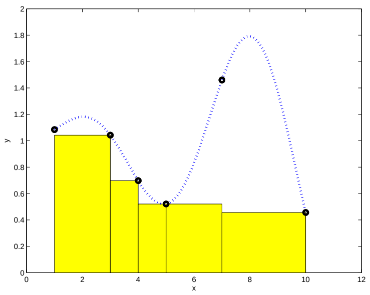
Metoda dreptunghiurilor - Pe scurt

În metoda dreptunghiurilor f este aproximată cu o funcţie g constantă pe porţiuni care încadrează inferior/superior funcţia.

Variante mai bune

- g este liniară pe porţiuni - metoda trapezelor;
- g parabolă pe porţiuni - metoda Simson





Notes

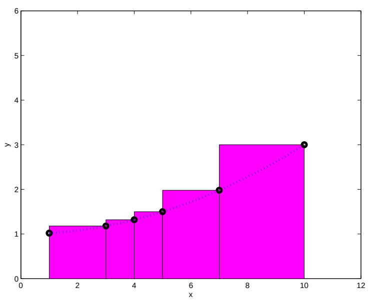
Introducere
Integrarea funcţiilor cunoscute prin date
Integrarea funcţiilor cunoscute prin cod
Concluzii
Metoda dreptunghiurilor
Metoda trapezelor
Metoda Simpson

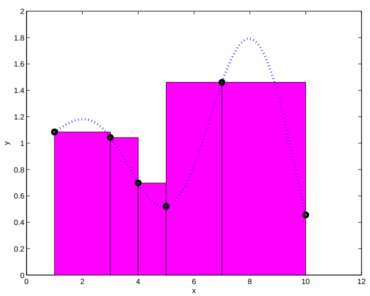
Metoda dreptunghiurilor - Pe scurt

În metoda dreptunghiurilor f este aproximată cu o funcţie g constantă pe porţiuni care încadrează inferior/superior funcţia.

Variante mai bune

- g este liniară pe porţiuni - metoda trapezelor;
- g parabolă pe porţiuni - metoda Simson





14/42
Gabriela Ciuprina
Integrarea numerică

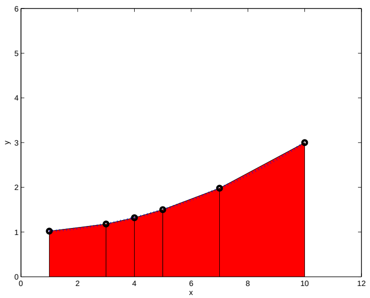
Notes

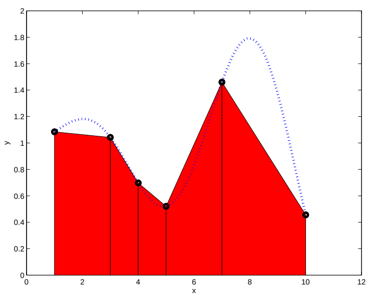
Metoda dreptunghiurilor - Pe scurt

În metoda dreptunghiurilor f este aproximată cu o funcţie g constantă pe porţiuni care încadrează inferior/superior funcţia.

Variante mai bune

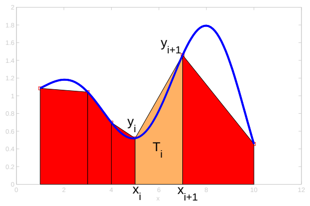
- g este liniară pe porţiuni - metoda trapezelor;
- g parabolă pe porţiuni - metoda Simson





Notes

Metoda trapezelor - Ideea



$$T_i = \frac{1}{2}(y_i + y_{i+1})(x_{i+1} - x_i)$$

$$T = \sum_{i=0}^{n-1} T_i$$

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}(y_i + y_{i+1})(x_{i+1} - x_i)$$

Obs: $T = (L + U)/2$

Notes

Metoda trapezelor - Ideea

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}(y_i + y_{i+1})(x_{i+1} - x_i)$$

În cazul unui pas echidistant $x_{i+1} - x_i = h, \forall i = 0, \ldots, n-1$:

$$\begin{aligned} T &= \frac{h}{2}\sum_{i=0}^{n-1}(y_i + y_{i+1}) = \frac{h}{2}\left(\sum_{i=0}^{n-1} y_i + \sum_{i=0}^{n-1} y_{i+1}\right) = \\ &= \frac{h}{2}\left(\sum_{i=0}^{n-1} y_i + \sum_{i=1}^{n} y_i\right) = \frac{h}{2}\left(y_0 + \sum_{i=1}^{n-1} y_i + \sum_{i=1}^{n-1} y_i + y_n\right) = \\ &= h\left(\frac{1}{2}y_0 + \sum_{i=1}^{n-1} y_i + \frac{1}{2}y_n\right) \qquad (1) \end{aligned}$$

Notes

Metoda trapezelor - Pe scurt

Integrala numerică este o combinaţie liniară a valorilor funcţiei.

În metoda trapezelor coeficienţii sunt:

y_0	y_1	y_2	$\cdots$	y_{n-2}	y_{n-1}	y_n
$\frac{h}{2}$	h	h	$\cdots$	h	h	$\frac{h}{2}$

Formulele de integrare numerică se mai numesc şi *reguli de cuadratură*.

Notes

Metoda trapezelor - Algoritm

```
funcţie integrala_trz(n,x,y)
; calculează integrala numerică prin metoda trapezelor
întreg n
tablou real x[n], y[n]          ; tabelul de valori, indici de la 0
...
T = 0
pentru i = 0, n − 1
        h = x_{i+1} − x_i
        T = T + (y_i + y_{i+1})h
•
întoarce T
```


Notes

Introducere
Integrarea funcţiilor cunoscute prin date
Integrarea funcţiilor cunoscute prin cod
Concluzii
Metoda dreptunghiurilor
Metoda trapezelor
Metoda Simpson

Metoda trapezelor - Algoritm

```
funcţie integrala_trz(n,x,y)
; calculează integrala numerică prin metoda trapezelor
întreg n
tablou real x[n], y[n]          ; tabelul de valori, indici de la 0
...
T = 0
pentru i = 0, n − 1
        h = x_{i+1} − x_i
        T = T + (y_i + y_{i+1})h
•
întoarce T
```


T = O(4n)   M = O(2n)

18/42
Gabriela Ciuprina Integrarea numerică

Notes

Metoda trapezelor - Algoritm

<u>`funcţie`</u> integrala_trz_uniform(n,x,y)
; calculează integrala numerică prin metoda trapezelor, pas echidistant
<u>`întreg`</u> n
<u>`tablou real`</u> $x[1]$, $y[n]$; tabelul de valori, indici de la 0
...
$T = (y_0 + y_n)/2$
$h = x_1 - x_0$
<u>`pentru`</u> $i = 1, n-1$
    $T = T + y_i$
•
<u>`întoarce`</u> Th

Notes

Introducere
Integrarea funcţiilor cunoscute prin date
Integrarea funcţiilor cunoscute prin cod
Concluzii
Metoda dreptunghiurilor
Metoda trapezelor
Metoda Simpson

Metoda trapezelor - Algoritm

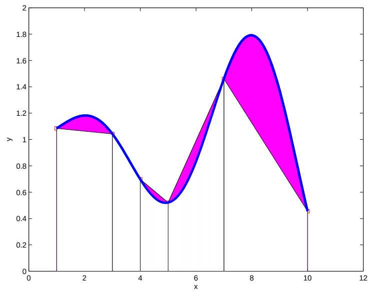
<u>`funcţie`</u> integrala_trz_uniform(n,x,y)
; calculează integrala numerică prin metoda trapezelor, pas echidistant
<u>`întreg`</u> n
<u>`tablou real`</u> $x[1]$, $y[n]$; tabelul de valori, indici de la 0
...
$T = (y_0 + y_n)/2$
$h = x_1 - x_0$
<u>`pentru`</u> $i = 1, n-1$
    $T = T + y_i$
•
<u>`întoarce`</u> Th

T = O(n) M = O(n)

19/42
Gabriela Ciuprina Integrarea numerică

Notes

Metoda trapezelor - Eroarea de trunchiere



- *locală* - pe fiecare interval;
- *globală* - pe întreg domeniul.

Notes

Metoda trapezelor - Eroarea de trunchiere

Eroarea locală absolută:

$$e_{\rm loc} = \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,{\rm d}x - \int_{x_k}^{x_{k+1}} g(x)\,{\rm d}x \qquad (2)$$

$$e_{\rm loc} = \int_{x_k}^{x_{k+1}} (f(x) - g(x))\,{\rm d}x = \int_{x_k}^{x_{k+1}} e_{\rm interp}(x)\,{\rm d}x$$

$$e_{\rm interp}(x) = \frac{f''(\zeta)}{2}(x - x_k)(x - x_{k+1})$$

$$e_{\rm loc} = \frac{f''(\zeta)}{2}\int_{x_k}^{x_{k+1}} (x - x_k)(x - x_{k+1})\,{\rm d}x = -\frac{f''(\zeta)}{12}(x_{k+1} - x_k)^3$$

$$|e_{\rm loc}| \le Ch^3$$

unde $h = x_{k+1} - x_k$ $|e_{\rm loc}| = O(h^2)$

Notes

Metoda trapezelor - Eroarea de trunchiere

Eroarea globală absolută:

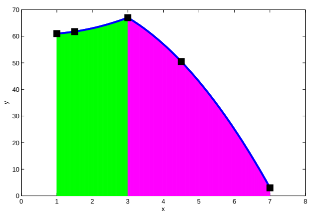
$$e_{\mathrm{g}} = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \qquad (3)$$

$$e_{\mathrm{g}} = \int_a^b (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n-1} e_{\mathrm{loc,k}}$$

$$|e_{\mathrm{g}}| \leq nCh^3 = \frac{b-a}{h} Ch^3 = \mathrm{O}(h^2)$$

Notes

Metoda Simpson - Ideea



$$S_i = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} g(x)\,\mathrm{d}x$$

unde g este polinomul de interpolare locală de ordin 2.

$$S = S_1 + S_3 + \cdots + S_{n-1}$$

Numărul de puncte din tabel trebuie să fie impar.

Notes

Metoda Simpson - Pe scurt

În cazul unui pas echidistant, se demonstrează că

$$S_i = h\left(\frac{1}{3}y_{i-1} + \frac{4}{3}y_i + \frac{1}{3}y_{i+1}\right)$$

$\Rightarrow$

y_0	y_1	y_2	y_3	y_4	$\cdots$	y_{n-2}	y_{n-1}	y_n
$\frac{h}{3}$	$\frac{4h}{3}$	$\frac{2h}{3}$	$\frac{4h}{3}$	$\frac{2h}{3}$	$\cdots$	$\frac{2h}{3}$	$\frac{4h}{3}$	$\frac{h}{3}$

$|e_g| = O(h^4)$
OBS: dacă funcţia e definită prin cod, este mai eficient să ajungem la o astfel de eroare folosind extrapolarea Richardson.

Notes

Metoda trapezelor - eroare

Pasul de integrare poate fi ales de utilizator.

- Eroarea globală de trunchiere O(h^2) $\Rightarrow$ scade atunci când h scade;
- Dar rotunjirile?

Notes

Metoda trapezelor - eroare

Dacă pp. $e_{y_k}/y_k < \mathrm{eps}$ şi $e_h = 0$ atunci

$$\begin{aligned} e_r &\le h\left(1/2|e_{y_0}| + 1/2|e_{y_n}| + \sum_{k=1}^{n} |e_{y_k}|\right) \le \\ &\le h\left(1/2|y_0|\mathrm{eps} + 1/2|y_n|\mathrm{eps} + \sum_{k=1}^{n} |y_k|\mathrm{eps}\right) \le \\ &\le ChnM_0\,\mathrm{eps} = C(b-a)M_0\,\mathrm{eps} = \mathrm{O}(1) \end{aligned}$$

Integrala este mult mai robustă decât derivarea numerică.
Nu numai că erorile de trunchiere sunt mai mici pentru acelaşi tip de funcţie de intepolare (lpp), dar şi efectul erorilor de rotunjire este mai mic.

Notes

Metoda trapezelor - efort de calcul

În cazul funcţiilor date prin cod
operaţia de referinţă este evaluarea funcţiei de integrat.

- Numărul de evaluări de funcţii creşte cu atunci când h scade.

Trebuie făcut un compromis între pasul de integrare şi efortul de calcul. Notasem:

$$T = \frac{h}{2}(y_0 + y_n) + h\sum_{i=1}^{n-1} y_i$$

E mai bine să notăm acum:

Notes

Metoda trapezelor - efort de calcul

În cazul funcţiilor date prin cod
operaţia de referinţă este evaluarea funcţiei de integrat.

- Numărul de evaluări de funcţii creşte cu atunci când h scade.

Trebuie făcut un compromis între pasul de integrare şi efortul de calcul. Notasem:

$$T = \frac{h}{2}(y_0 + y_n) + h\sum_{i=1}^{n-1} y_i$$

E mai bine să notăm acum:

$$T = \frac{h}{2}(f(x_0) + f(x_n)) + h\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)$$

Notes

Introducere
Integrarea funcţiilor cunoscute prin date
Integrarea funcţiilor cunoscute prin cod
Concluzii
Analiza erorii
Metoda trapezelor recursive
Metoda Romberg

Metoda trapezelor - efort de calcul

În cazul funcţiilor date prin cod
operaţia de referinţă este evaluarea funcţiei de integrat.

- Numărul de evaluări de funcţii creşte cu atunci când h scade.

Trebuie făcut un compromis între pasul de integrare şi efortul de calcul. Notasem:

$$T = \frac{h}{2}(y_0 + y_n) + h\sum_{i=1}^{n-1} y_i$$

E mai bine să notăm acum:

$$T(f, \mathcal{P}) = \frac{h}{2}(f(x_0) + f(x_n)) + h\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)$$

27/42
Gabriela Ciuprina Integrarea numerică

Notes

Metoda trapezelor - efort de calcul

În cazul funcţiilor date prin cod
operaţia de referinţă este evaluarea funcţiei de integrat.

- Numărul de evaluări de funcţii creşte cu atunci când h scade.

Trebuie făcut un compromis între pasul de integrare şi efortul de calcul. Notasem:

$$T = \frac{h}{2}(y_0 + y_n) + h\sum_{i=1}^{n-1} y_i$$

E mai bine să notăm acum:

$$T(f, \mathcal{P}) = \frac{h}{2}(f(x_0) + f(x_n)) + h\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)$$

unde $\mathcal{P}$ este o partiţie a domeniului: $a = x_0, x_1, \ldots, x_n = b$

Notes

Trapeze recursive - Ideea

- Se înjumătăţesc intervalele până când valoarea integralei nu se mai modifică;
- La fiecare pas se evaluează funcţia numai în punctele în care nu a mai fost evaluată.

Partiţia iniţială: $\mathcal{P}_0$: $a = x_0, x_1 = b$
Pasul iniţial: $h_0 = b - a$
Prima aproximaţie a integralei:

$$T_0 = T(f, \mathcal{P}_0) = \frac{b-a}{2}(f(a) + f(b))$$

Notes

Trapeze recursive - Ideea

$\mathcal{P}_1$: $a = x_0, x_1^{(1)} = (a+b)/2, x_2 = b$
$h_1 = (b-a)/2$

$$T_1 = T(f, \mathcal{P}_1) = \frac{h_1}{2}(f(a) + f(b)) + h_1 f(x_1^{(1)})$$

o evaluare nouă

$\mathcal{P}_2$: $a = x_0, x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, x_3^{(2)}, x_4 = b$
$h_2 = (b-a)/2^2$

$$T_2 = T(f, \mathcal{P}_2) = \frac{h_2}{2}(f(a) + f(b)) + h_2 \sum_{i=1}^{3} f(x_i^{(2)})$$

două evaluari noi

Notes

Trapeze recursive - Ideea

$\mathcal{P}_m$: $a = x_0, x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, \ldots, x_{2^m} = b$
$h_m = (b-a)/2^m$

$$T_m = T(f, \mathcal{P}_m) = \frac{h_m}{2}(f(a) + f(b)) + h_m \sum_{i=1}^{2^m-1} (x_i^{(m)})$$

Algoritmul se bazează pe următoarea relaţie de recurenţă:

$$T_m = \frac{1}{2} T_{m-1} + h_m \sum_{i=1}^{2^m-1} f(a + (2i-1)h_m)$$

$T_0, T_1, T_2, T_3, \ldots$
şi se opreşte atunci când diferenţa dintre două aproximaţii consecutive este mai mică decât o toleranţă impusă.

Notes

Trapeze recursive - Alte notaţii

Alte notaţii, utile pentru ce urmează:

$$T_m = R(m, 0)$$

(R - de la *Romberg*)

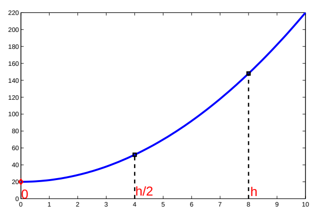
$$R(m, 0) = \frac{1}{2} R(m-1, 0) + h \sum_{i=1}^{2^{m-1}} f(a + (2i-1)h)$$

unde $h = (b-a)/2^m$.

Notes

Extrapolarea Richardson - Ideea

La trapeze, eroarea globală este O(h^2): $I(h) = I_0 + Ch^2$



1. Evaluăm integrala pentru h_0:

$$I_1 = I_0 + Ch_0^2$$

2. Reducem pasul la jumătate:

$$I_2 = I_0 + C\left(\frac{h_0}{2}\right)^2$$

$\Rightarrow$

$$I_0 = \frac{4I_2 - I_1}{3}$$

Notes

Extrapolarea Richardson

Obs:

- Formula care se obţine este exact formula Simpson (nr. impar de noduri).
- I_0 nu este chiar valoarea exactă (nici într-o aritmetică precisă), deoarece se demonstrează că eroare de trunchiere este mai precis

$$I(h) = I_0 + c_2 h^2 + c_4 h^4 + c_6 h^6 + \cdots$$

Mai corect este să aplicăm extrapolarea Richardson, aşa cum am procedat la derivare.

Notes

Extrapolare Richardson - Ideea generală

Se poate aplica pentru aproximarea cu acurateţe din ce în ce mai mare a unei mărimi I, pentru care există o funcţie $\varphi(h)$. a.î.

- $I = \lim_{h\to 0} \varphi(h)$
- $\varphi(h)$ poate fi evaluată pentru orice h;
- are loc proprietatea:

$$\varphi(h) = I - \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k} h^{2k} \tag{4}$$

unde coeficienţii a_{2k} nu sunt cunoscuţi.

Se alege un h potrivit şi se calculează numerele

$$R(i,0) = \varphi(h/2^i), \quad i = 0,\ldots,n. \tag{5}$$

Notes

Extrapolare Richardson - Ideea generală

$R(i,0)$ reprezintă estimări ale lui I, dar estimări mai precise se pot obţine prin extrapolare Richardson.
Se demonstrează că [Cheney]:

$$R(i,j) = R(i,j-1) + (R(i,j-1) - R(i-1,j-1))/(4^i - 1), \quad j = 0, \dots, i. \tag{6}$$

$$\begin{array}{lllll} R(0,0) & & & & \\ R(1,0) & R(1,1) & & & \\ R(2,0) & R(2,1) & R(2,2) & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ R(n,0) & R(n,1) & R(n,2) & \cdots & R(n,n) \end{array} \tag{7}$$

Introducere
Integrarea funcţiilor cunoscute prin date
Integrarea funcţiilor cunoscute prin cod
Concluzii
Analiza erorii
Metoda trapezelor recursive
Metoda Romberg

Metoda Romberg

Metoda Romberg = extrapolare Richardson pentru evaluarea integralelor
Se dau:

- funcţia dată prin cod f;
- informaţia despre ordinul erorii la care dorim să ajungem n.

```
...
pentru i = 0,n
    R_{i,0} = ... ; apel trapeze
    pentru j = 1,i
        R_{i,j} = R_{i,j-1} + (R_{i,j-1} - R_{i-1,j-1})/(4^i - 1)
    •
    h = h/2
•
...
```


Notes

Notes

Concluzii

- Integrarea numerică se bazează pe calcul de arii;
- Rezultatul final = combinaţie liniară ale valorilor funcţiei într-un număr de puncte;
- Metoda dreptunghiurilor O(h)
- Metoda trapezelor O(h^2)
- Metoda Simpson O(h^4)
- Schemele recursive - îndesirea reţelei, se păstrează ordinul
- Romberg (Extrapolarea Richardson) - obţine estimări cu ordine din ce în ce mai precise

Notes

Formule de integrare numerică Newton-Cotes

Formulele de integrare numerică scrise pentru o reţea de discretizare uniformă se numesc şi formule Newton-Cotes.
Din cauza fenomenului Runge, aceste formule sunt utile doar dacă ordinul polinomului de interpolare n folosit pentru deducerea lor este mic.
Există formule Newton-Cotes

1. "închise" - folosesc inclusiv valorile în capete. Se folosesc în calculul integralelor definite (considerate până acum) şi în rezolvarea ecuaţiilor cu derivate ordinare (ODE) în metodele multipas (cursul următor)..
2. "deschise" - nu folosesc valorile în capete. Se folosesc în rezolvare ODE cu metode multipas.

Notes

Formule Newton-Cotes închise

Grid uniform $x_0, x_1, \ldots, x_n$, pas h
$f_i = f(x_i)$
Formulele conţin f_0 şi f_n.

n (gradul polinomului)	Pasul h	Numele uzual al formulei	Formula	Eroarea locală
1	$x_1 - x_0$	trapezului	$\frac{h}{2}(f_0 + f_1)$	$O(h^3)$
2	$x_1 - x_0 = \frac{x_2 - x_0}{2}$	Simpson 1/3	$\frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + f_2)$	$O(h^5)$
3	$x - 1 - x_0 = \frac{x_3 - x_0}{3}$	Simpson 3/8	$\frac{3h}{8}(f_0 + 3f_1 + 3f_2 + f_3)$	$O(h^5)$

Notes

Formule Newton-Cotes deschise

Grid uniform $x_0, x_1, \ldots, x_n$, pas h
$f_i = f(x_i)$
Formulele **nu** conţin f_0 şi f_n.

Gradul polinomului	Pasul h	Numele uzual al formulei	Formula	Eroarea locală
0	$x_1 - x_0 = \frac{x_2 - x_0}{2}$	regula dreptunghiului sau punctului din mijloc	$2hf_1$	$O(h^3)$
1	$x_1 - x_0 = \frac{x_3 - x_0}{3}$	trapezului	$\frac{3h}{2}(f_1 + f_2)$	$O(h^3)$
2	$x_1 - x_0 = \frac{x_4 - x_0}{4}$	regula lui Milne	$\frac{4h}{3}(2f_1 - f_2 + 2f_3)$	$O(h^5)$

Pentru deducerea acestor formule puteţi proceda astfel: scrieţi polinoamele de interpolare pdeterminate de nodurile interioare $1, \ldots, n-1$. Extrapolaţi valorile pentru a estima f_0 şi f_n. Aplicaţi apoi formule de integrare închise şi înlocuiţi f_0 şi f_n cu expresiile determinate anterior.

Notes

Generalizări

- Metodele se pot generaliza pentru calcul de integrare pe domenii multidimensionale cubice, dar efortul de calcul creşte cu creşterea dimensiunii domeniului;
- Pentru domenii multidimensionale cubice o metoda mai eficientă de integrare este metoda Gauss care pentru un număr fixat de puncte găseşte cei mai potriviţi coeficienţi ai combinaţiei liniare finale;
- În cazul domeniilor de orice formă, sau domeniilor de dimensiuni mari, este de preferat folosirea metodei Monte Carlo

Notes

Referinţe

- [Ioan98] D. Ioan et al., *Metode numerice in ingineria electrica*, Ed. Matrix Rom, Bucuresti, 1998. (Capitolul 15)
- [Cheney08] Ward Cheney and David Kincaid, *Numerical Mathematics and Computing*, Brooks/Cole publishing Company,2000. (Capitolele 5, 6, 13))

  Disponibilă la http://www.physics.brocku.ca/Courses/5P10/References/cheneykincaid.pdf

Notes