Rezolvarea ecuaţiilor algebrice neliniare

Prof.dr.ing. Gabriela Ciuprina

Universitatea "Politehnica" Bucureşti, Facultatea de Inginerie Electrică

Suport didactic pentru disciplina *Algoritmi Numerici*, 2017-2018

Notes

Cuprins

Notes

Formularea problemei

Enunţ

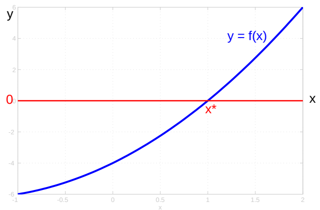
Se dă $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, continuă.
Se cere x pentru care

$$f(x) = 0$$

Buna formulare matematică

Există o soluţie $x^* \in [a, b]$ şi aceasta este unică.

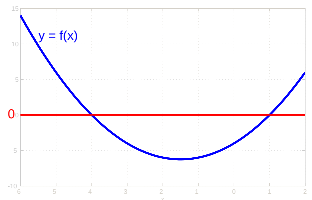
$$f(x^*) = 0$$

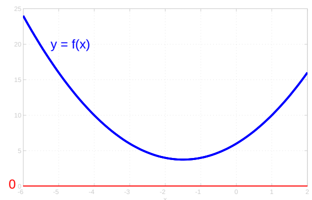


Notes

Formularea problemei

Exemple de probleme prost formulate:

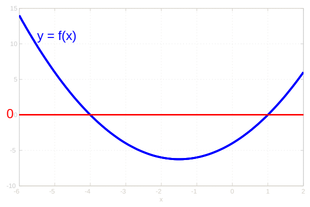


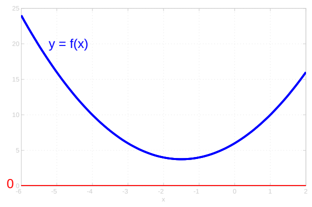


Notes

Formularea problemei

Exemple de probleme prost formulate:





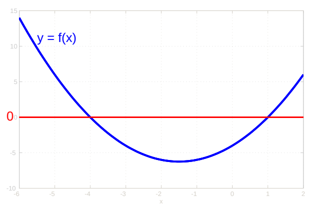
Soluţia nu este unică.

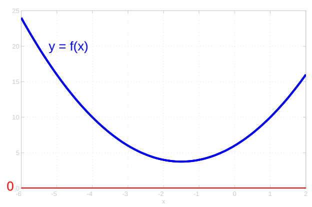
Notes

Ecuaţii algebrice neliniare - formularea problemei
Metode de rezolvare numerică - prin încadrare
Metode de rezolvare numerică - prin interpolare
Metode de rezolvare numerică - prin iteraţii de punct fix
Metode hibride
Enunţ şi buna formulare
Exemple

Formularea problemei

Exemple de probleme prost formulate:





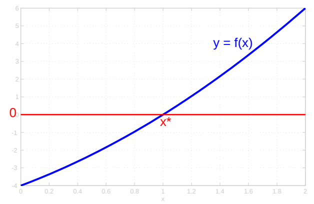
Soluţia nu este unică.

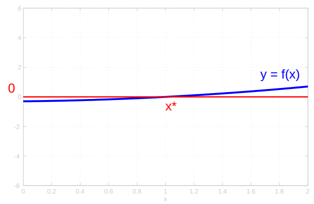
Nu există soluţie.

Notes

Condiţionarea problemei

Condiţionarea depinde de panta lui *f* în apropierea soluţiei.

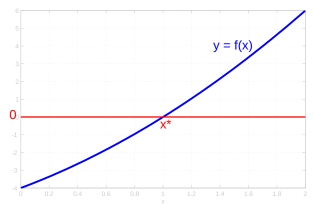


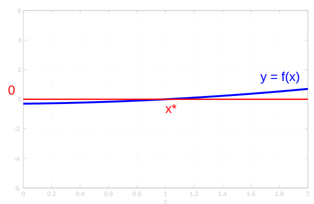


Notes

Condiţionarea problemei

Condiţionarea depinde de panta lui *f* în apropierea soluţiei.



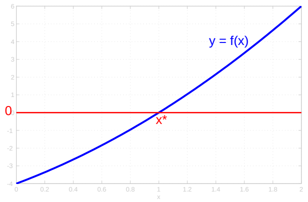


Bine condiţionată.

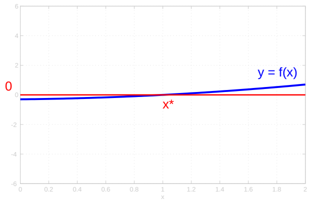
Notes

Condiţionarea problemei

Condiţionarea depinde de panta lui f în apropierea soluţiei.



Bine condiţionată.



Prost condiţionată.

Notes

Condiţionarea problemei

Numărul de condiţionare (revedeţi cursul despre erori):

Formulare implicită

$$f(x) = y$$

(y - date, x - rezultat), aici $y = 0$

Formulare explicită

$$x = g(y)$$

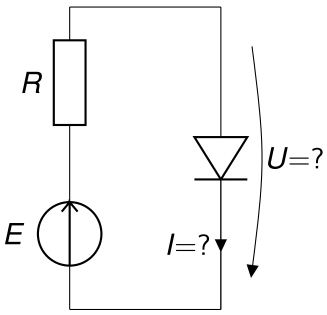
($g = f^{-1}$)

$$\hat{k} = \|J(g(y))\| = |g'(y)| = \frac{1}{|f'(x)|}$$

Dacă $|f'(x^*)| \approx 0 \Rightarrow \hat{k}$ e mare $\Rightarrow$ prost condiţionată.

Notes

Exemplul 1



Se dau: E, R şi caracteristica $i = g(u)$

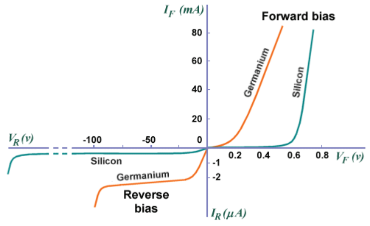


Figura este preluată de la

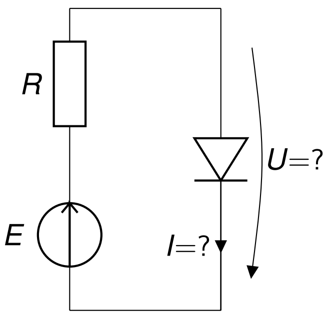
https://www.technologyuk.net/physics/

Se cere: punctul static de funcţionare al diodei (I, U)

Notes

Ecuaţii algebrice neliniare - formularea problemei
Metode de rezolvare numerică - prin încadrare
Metode de rezolvare numerică - prin interpolare
Metode de rezolvare numerică - prin iteraţii de punct fix
Metode hibride
Enunţ şi buna formulare
Exemple

Exemplul 1



$$\begin{aligned} u &= -Ri + E \\ i &= g(u) \end{aligned}$$

$$u + Rg(u) - E = 0$$

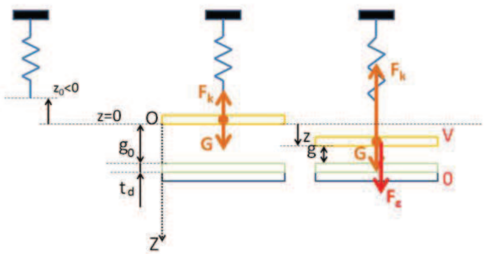
$$f(u) = 0$$

unde

$$f(u) = u + Rg(u) - E$$

Notes

Exemplul 2



Se dau:
g_0, A, t_d
k, ε_r
V
Se cere: g

$$k(g_0 - g) = \frac{\varepsilon_0 A V^2}{2\left(g + \frac{t_d}{\varepsilon_r}\right)^2}$$

$$f(g) = 0$$

unde

$$f(g) = (g - g_0)\left(g + \frac{t_d}{\varepsilon_r}\right)^2 + \frac{\varepsilon_0 A V^2}{2k}$$

Notes

Metoda bisecţiei - ideea

Ipoteză suplimentară:

$$f(a)f(b) < 0$$

Ideea

$$x_0, x_1, \ldots, x_k, \ldots \to x^*$$

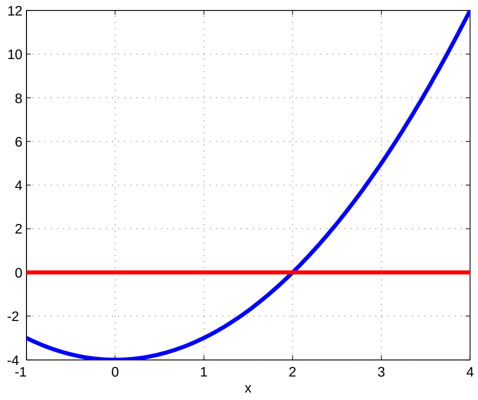
Prin înjumătăţirea intervalului:

1. $x_m = (a + b)/2$
2. se va selecta dintre intervalele $[a, x_m]$ şi $[x_m, b]$ pe acela care conţine soluţia
3. se renotează cu $[a, b]$ jumătatea aleasă şi se reia de la pasul 1.

Algoritmul se opreşte atunci când $|b - a| < \varepsilon$
ε este o eroare absolută impusă de utilizator.

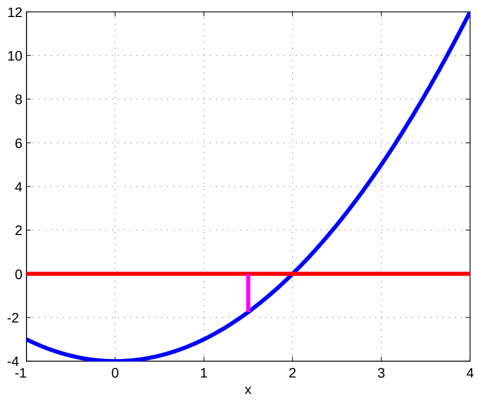
Notes

Metoda bisecţiei - ideea



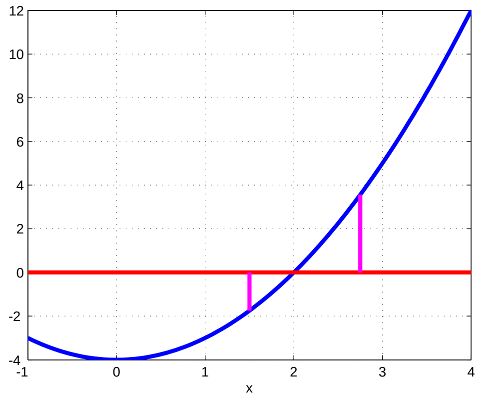
Notes

Metoda bisecţiei - ideea



Notes

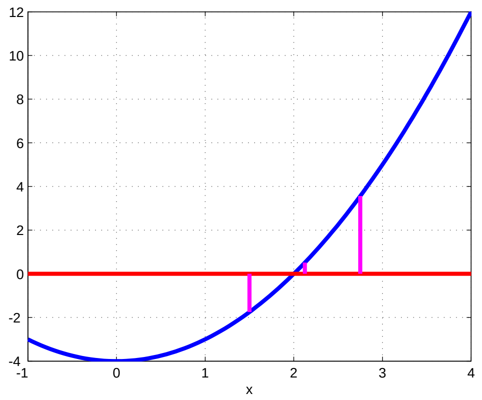
Metoda bisecţiei - ideea



Notes

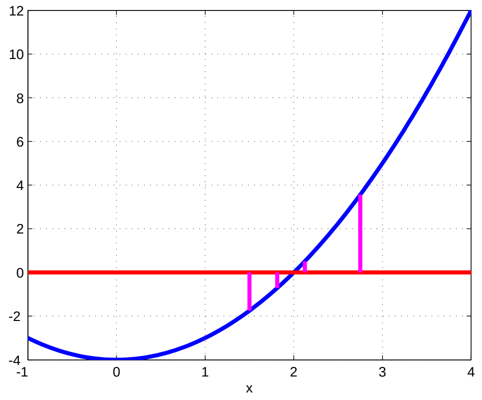
Ecuaţii algebrice neliniare - formularea problemei
Metode de rezolvare numerică - prin încadrare
Metode de rezolvare numerică - prin interpolare
Metode de rezolvare numerică - prin iteraţii de punct fix
Metode hibride
Metoda bisecţiei (a înjumătăţirii intervalului)
Metoda falsei poziţii (a coardei)

Metoda bisecţiei - ideea



Notes

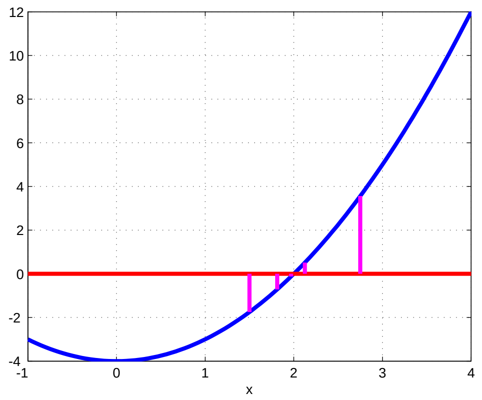
Metoda bisecţiei - ideea



Notes

Ecuaţii algebrice neliniare - formularea problemei
Metode de rezolvare numerică - prin încadrare
Metode de rezolvare numerică - prin interpolare
Metode de rezolvare numerică - prin iteraţii de punct fix
Metode hibride
Metoda bisecţiei (a înjumătăţirii intervalului)
Metoda falsei poziţii (a coardei)

Metoda bisecţiei - ideea



10/47
Gabriela Ciuprina
Ecuaţii şi sisteme algebrice neliniare

Notes

Metodei bisecţiei - algoritm

```
funcţie bisecţie (a, b, eps, nit)
    real a, b                    ; domeniul de definiţie al funcţiei f
    real ε                       ; eroarea impusă
    întreg nit                   ; număr maxim de iteraţii
    real xm                      ; soluţia
    întreg k = 0                 ; contor iteraţii
    repetă
        k = k + 1
        xm = (a + b)/2
        dacă f(xm)f(a) > 0 atunci
            a = xm
        altfel
            b = xm
    până când (b − a) < eps sau k > nit
    dacă k > nit
        scrie Eroarea impusă nu a fost atinsă.
    întoarce xm        ; soluţie
retur
```


Notes

Metoda bisecţiei - erori

La fiecare iteraţie, eroarea absolută se înjumătăţeste:

$$
\begin{aligned}
|x_0 - x^*| &< l \\
|x_1 - x^*| &< l/2 \\
|x_2 - x^*| &< l/2^2 \\
&\vdots \\
|x_k - x^*| &< l/2^k \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

$l = b - a$

În ipotezele făcute, procedura este garantat convergentă!

Notes

Metoda falsei poziţii (*regula falsi*) - ideea

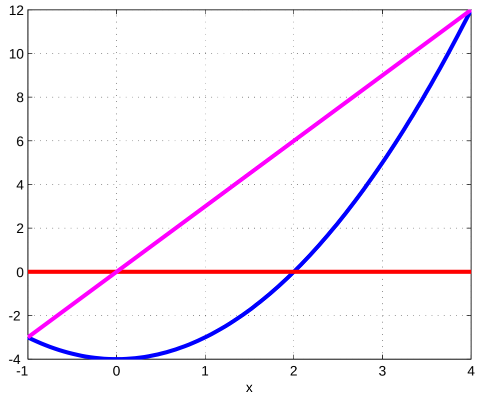
Ideea: similară cu a bisecţiei - alegerea unui interval în care funcţia îşi schimbă semnul

DAR nu se înjumătăţeşte intervalul

Intervalul se împarte în două părţi, determinate de intersecţia coardei determinată de punctele $(a, f(a))$ şi $(b, f(b))$ cu axa Oy.

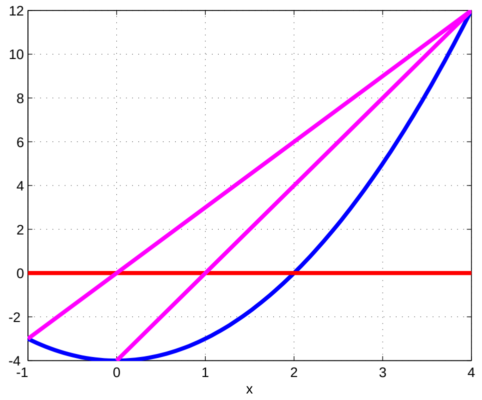
Notes

Metoda falsei poziţii (*regula falsi*) - ideea



Notes

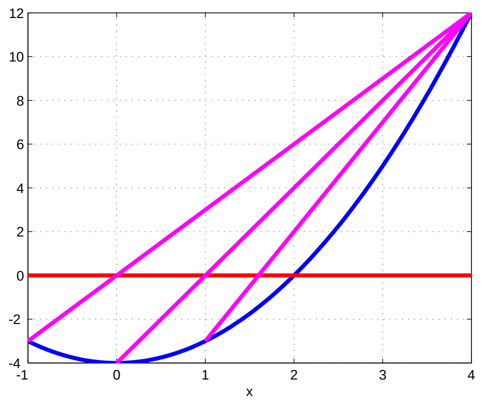
Metoda falsei poziţii (*regula falsi*) - ideea



Notes

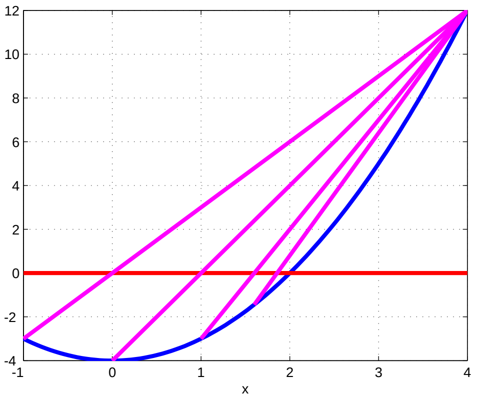
Ecuaţii algebrice neliniare - formularea problemei
Metode de rezolvare numerică - prin încadrare
Metode de rezolvare numerică - prin interpolare
Metode de rezolvare numerică - prin iteraţii de punct fix
Metode hibride
Metoda bisecţiei (a înjumătăţirii intervalului)
Metoda falsei poziţii (a coardei)

Metoda falsei poziţii (*regula falsi*) - ideea



Notes

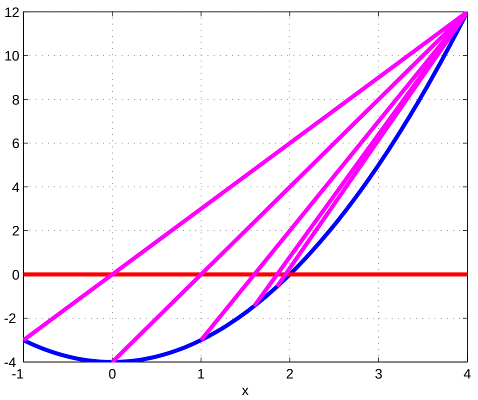
Metoda falsei poziţii (*regula falsi*) - ideea



Notes

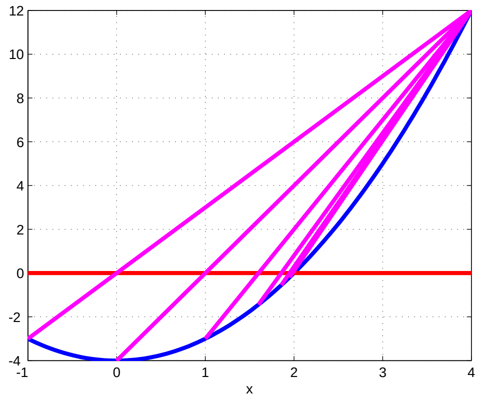
Ecuaţii algebrice neliniare - formularea problemei
Metode de rezolvare numerică - prin încadrare
Metode de rezolvare numerică - prin interpolare
Metode de rezolvare numerică - prin iteraţii de punct fix
Metode hibride
Metoda bisecţiei (a înjumătăţirii intervalului)
Metoda falsei poziţii (a coardei)

Metoda falsei poziţii (*regula falsi*) - ideea



Notes

Metoda falsei poziţii (*regula falsi*) - ideea



Notes

Metoda falsei poziţii (*regula falsi*) - algoritm

$$y(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a)$$

$$y(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}$$

1. $x_m = (af(b) - bf(a))/(f(b) - f(a))$
2. se va selecta dintre intervalele $[a, x_m]$ şi $[x_m, b]$ pe acela care conţine soluţia
3. se renotează cu $[a, b]$ intervalul ales şi se reia de la pasul 1.

Algoritmul se opreşte atunci când $|b - a| < \varepsilon$
ε este o eroare absolută impusă de utilizator.

Notes

Metoda falsei poziţii (*regula falsi*) - convergenţă

- Convergenţa este asigurată dacă funcţia este continuă şi îşi schimbă semnul pe intervalul [a,b];
- Convergenţa ar putea fi mai rapidă decât la bisecţie dacă întotdeauna intervalul ales este mai mic decât jumătate din intervalul anterior;
- Ideea poate fi folosită în combinaţie cu metoda secantelor[1] pentru a preveni divergenţa acesteia din urmă.
- O variantă mai rapid convergentă a acestei metode este cunoscută sub numele de metoda lui Ridder detalii aici. Se foloseşte valoarea funcţiei f la mijlocul intervalului pentru a determina o altă funcţie h care are aceeaşi rădăcină ca şi f. Metoda falsei poziţii se aplică pentru h.

[1] Metoda secantelor este prezentată în slide-urile care urmează

Notes

Ideea metodelor bazate pe interpolare

Interpolare directă:

- Se folosesc valorile funcţiei deja calculate pentru a găsi o interpolare g a funcţiei f.
- Aproximaţia rădăcinii este dată de zeroul polinomului de interpolare g.

$f(x) \approx g(x)$
$f(x^*) = 0 \quad \Rightarrow \quad g(x^*) \approx 0$
Algoritm:
$g(x_k) = 0 \quad \Rightarrow \quad f(x_k) \approx 0$

Notes

Ideea metodelor bazate pe interpolare

Interpolare inversă:

- Se folosesc valorile funcţiei deja calculate pentru a găsi o interpolare h a funcţiei f^{-1}.
- Aproximaţia rădăcinii este dată de $h(0)$.

$f(x) = y \quad \Rightarrow \quad x = f^{-1}(y)$
$f(x^*) = 0 \quad \Rightarrow \quad x^* = f^{-1}(0)$
$f^{-1}(y) \approx h(y) \Rightarrow \quad x^* \approx h(0)$

Algoritm:

$x_k = h(0) \quad \Rightarrow \quad x_k \approx x^*$

Notes

Metode bazate pe interpolare liniară

Metode care folosesc interpolări de ordinul 1 (două puncte)

1. Metoda falsei poziţii[2] - cele două puncte nu sunt neaparat ultimele două aproximaţii calculate.
2. Metoda secantelor[3] - cele două puncte sunt exact ultimele două aproximaţii calculate.

[2] Prezentată anterior, ca o metodă de încadrare
[3] Prezentată în slide-urile următoare, ca o metodă de punct fix

Notes

Metode bazate pe interpolarea pătratică

Metode care folosesc interpolări de ordinul 2 (trei puncte)

1. Metoda Muller
   Se aproximează f cu o parabolă folosind ultimele trei aproximaţii calculate.
   Se calculează o rădăcină a acestei parabole, cea mai apropiată de ultima aproximaţie calculată.
   Detalii la
   Eric W. "Muller's Method." From MathWorld–A Wolfram Web Resource.
   http://mathworld.wolfram.com/MullersMethod.html
2. Interpolarea pătratică inversă
   Se aproximează f^{-1} cu o parabolă folosind ultimele trei aproximaţii calculate.
   Se evaluează acest polinom de interpolare în 0.
   Este folosită mai des în combinaţie cu alte metode.

Notes

Ecuaţii algebrice neliniare - formularea problemei
Metode de rezolvare numerică - prin încadrare
Metode de rezolvare numerică - prin interpolare
Metode de rezolvare numerică - prin iteraţii de punct fix
Metode hibride
Interpolare directă
Interpolare inversă
... de ordinul 1
... de ordinul 2

Interpolarea pătratică inversă

Polinomul de interpolare pentru f^{-1}, folosind punctele: (x_{k-2}, f_{k-2}), (x_{k-1}, f_{k-1}), (x_k, f_k) este:

$$f^{-1}(y) = \frac{(y-f_{k-1})(y-f_k)}{(f_{k-2}-f_{k-1})(f_{k-2}-f_k)}x_{k-2} + \frac{(y-f_{k-2})(y-f_k)}{(f_{k-1}-f_{k-2})(f_{k-1}-f_k)}x_{k-1} + \frac{(y-f_{k-2})(y-f_{k-1})}{(f_k-f_{k-2})(f_k-f_{k-1})}x_k$$

Aproximaţia următoare $x_{k+1} = f^{-1}(0)$

$$x_{k+1} = \frac{f_{k-1}f_k}{(f_{k-2}-f_{k-1})(f_{k-2}-f_k)}x_{k-2} + \frac{f_{k-2}f_k}{(f_{k-1}-f_{k-2})(f_{k-1}-f_k)}x_{k-1} + \frac{f_{k-2}f_{k-1}}{(f_k-f_{k-2})(f_k-f_{k-1})}x_k \qquad (1)$$

Notes

Ideea metodei iteraţiei simple

Ecuaţia de rezolvat:

$$f(x) = 0 \tag{2}$$

Ideea:

$$x_0, x_1, \ldots, x_k, \ldots \to x^*$$

Calcul recursiv:

$$x_k = g(x_{k-1}), \tag{3}$$

g se numeşte *funcţie de iteraţie*

Notes

Ecuaţii algebrice neliniare - formularea problemei
Metode de rezolvare numerică - prin încadrare
Metode de rezolvare numerică - prin interpolare
Metode de rezolvare numerică - prin iteraţii de punct fix
Metode hibride
Metoda iteraţiei simple
Metoda Newton (a tangentelor)
Metoda secantelor

Ideea metodei iteraţiei simple

Ecuaţia de rezolvat:

$$f(x) = 0 \tag{2}$$

Ideea:

$$x_0, x_1, \ldots, x_k, \ldots \to x^*$$

Calcul recursiv:

$$x_k = g(x_{k-1}), \tag{3}$$

g se numeşte *funcţie de iteraţie*

1. $g = ?$

Notes

Ideea metodei iteraţiei simple

Ecuaţia de rezolvat:

$$f(x) = 0 \tag{2}$$

Ideea:

$$x_0, x_1, \ldots, x_k, \ldots \to x^*$$

Calcul recursiv:

$$x_k = g(x_{k-1}), \tag{3}$$

g se numeşte *funcţie de iteraţie*

1. $g = ?$
2. $x_0 = ?$

Notes

Ecuaţii algebrice neliniare - formularea problemei
Metode de rezolvare numerică - prin încadrare
Metode de rezolvare numerică - prin interpolare
Metode de rezolvare numerică - prin iteraţii de punct fix
Metode hibride
Metoda iteraţiei simple
Metoda Newton (a tangentelor)
Metoda secantelor

Ideea metodei iteraţiei simple

Ecuaţia de rezolvat:

$$f(x) = 0 \tag{2}$$

Ideea:

$$x_0, x_1, \ldots, x_k, \ldots \to x^*$$

Calcul recursiv:

$$x_k = g(x_{k-1}), \tag{3}$$

g se numeşte *funcţie de iteraţie*

1. $g = ?$
2. $x_0 = ?$
3. Şirul este convergent?

Notes

Ideea metodei iteraţiei simple

Ecuaţia de rezolvat:

$$f(x) = 0 \qquad (2)$$

Ideea:

$$x_0, x_1, \ldots, x_k, \ldots \to x^*$$

Calcul recursiv:

$$x_k = g(x_{k-1}), \qquad (3)$$

g se numeşte *funcţie de iteraţie*

1. $g = ?$
2. $x_0 = ?$
3. Şirul este convergent?
4. Care este criteriul de oprire?

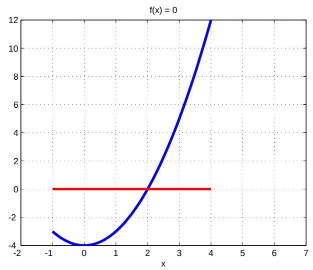
Notes

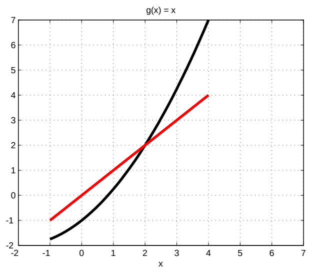
Metoda iteraţiei simple - construcţia lui *g*

$$x_k = g(x_{k-1}), \qquad \lim_{k \to \infty} x_k = x \qquad (4)$$

$$x = g(x) \qquad (5)$$

Soluţia ecuaţiei $f(x) = 0$ este punct fix al aplicaţiei g





Notes

Metoda iteraţiei simple - construcţia lui g

$$f(x) = 0$$

Notes

Ecuaţii algebrice neliniare - formularea problemei
Metode de rezolvare numerică - prin încadrare
Metode de rezolvare numerică - prin interpolare
Metode de rezolvare numerică - prin iteraţii de punct fix
Metode hibride
Metoda iteraţiei simple
Metoda Newton (a tangentelor)
Metoda secantelor

Metoda iteraţiei simple - construcţia lui g

$$f(x) = 0$$

$$cf(x) = 0$$

Notes

Metoda iteraţiei simple - construcţia lui g

$$f(x) = 0$$

$$cf(x) = 0$$

$$x + cf(x) = x$$

Notes

Ecuaţii algebrice neliniare - formularea problemei
Metode de rezolvare numerică - prin încadrare
Metode de rezolvare numerică - prin interpolare
Metode de rezolvare numerică - prin iteraţii de punct fix
Metode hibride
Metoda iteraţiei simple
Metoda Newton (a tangentelor)
Metoda secantelor

Metoda iteraţiei simple - construcţia lui g

$$f(x) = 0$$

$$cf(x) = 0$$

$$x + cf(x) = x$$

$$g(x) = x + cf(x) \tag{6}$$

Notes

Metoda iteraţiei simple - construcţia lui g

$$f(x) = 0$$

$$cf(x) = 0$$

$$x + cf(x) = x$$

$$g(x) = x + cf(x) \tag{6}$$

$$x_k = x_{k-1} + cf(x_{k-1}) \qquad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{7}$$

Notes

Metoda iteraţiei simple - convergenţa

$$g(x) = x + cf(x) \tag{8}$$

$$x_k = x_{k-1} + cf(x_{k-1}) \qquad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{9}$$

Iniţializare arbitrară $x_0 \in [a, b]$.
Obs: Constanta c influenţează puternic convergenţa.

Teoremă - condiţie suficientă de convergenţă

Dacă g este o contracţie, atunci şirul iteraţiilor este convergent.

g este contracţie, dacă:

$$|g(x_1) - g(x_2)| < |x_1 - x_2|, \forall x_1, x_2 \in [a, b] \tag{10}$$

Notes

Metoda iteraţiei simple - convergenţa

$$g(x) = x + cf(x) \tag{8}$$

$$x_k = x_{k-1} + cf(x_{k-1}) \qquad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{9}$$

Iniţializare arbitrară $x_0 \in [a, b]$.
Obs: Constanta c influenţează puternic convergenţa.

Teoremă - condiţie suficientă de convergenţă

Dacă g este o contracţie, atunci şirul iteraţiilor este convergent.

g este contracţie, dacă:

$$|g(x_1) - g(x_2)| \leq L|x_1 - x_2|, \forall x_1, x_2 \in [a, b] \tag{10}$$

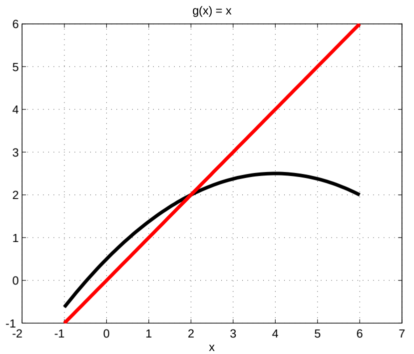
$L < 1$ (strict!)

Notes

Metoda iteraţiei simple - convergenţa

Teoremă - condiţie suficientă de convergenţă

Dacă f este derivabilă şi $|g'| < 1 \Rightarrow$ iteraţii convergente.



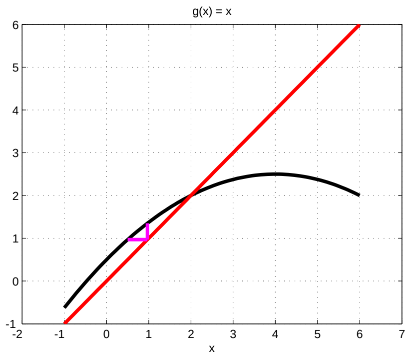
Convergent

Notes

Metoda iteraţiei simple - convergenţa

Teoremă - condiţie suficientă de convergenţă

Dacă f este derivabilă şi $|g'| < 1 \Rightarrow$ iteraţii convergente.



Convergent

Notes

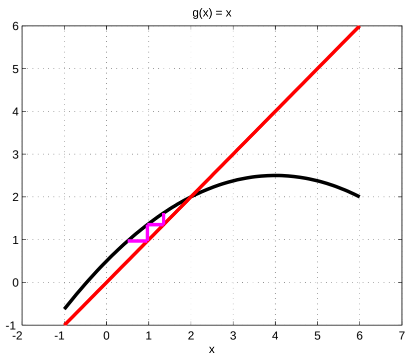
Ecuaţii algebrice neliniare - formularea problemei
Metode de rezolvare numerică - prin încadrare
Metode de rezolvare numerică - prin interpolare
Metode de rezolvare numerică - prin iteraţii de punct fix
Metode hibride

Metoda iteraţiei simple
Metoda Newton (a tangentelor)
Metoda secantelor

Metoda iteraţiei simple - convergenţa

Teoremă - condiţie suficientă de convergenţă

Dacă f este derivabilă şi $|g'| < 1 \Rightarrow$ iteraţii convergente.



Convergent

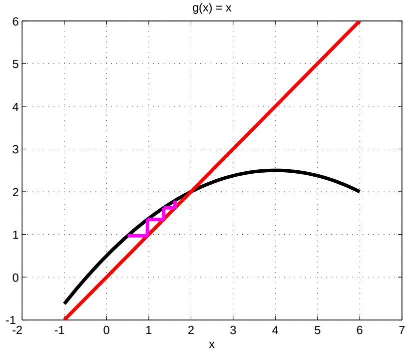
26/47
Gabriela Ciuprina
Ecuaţii şi sisteme algebrice neliniare

Notes

Metoda iteraţiei simple - convergenţa

Teoremă - condiţie suficientă de convergenţă

Dacă f este derivabilă şi $|g'| < 1 \Rightarrow$ iteraţii convergente.



Convergent

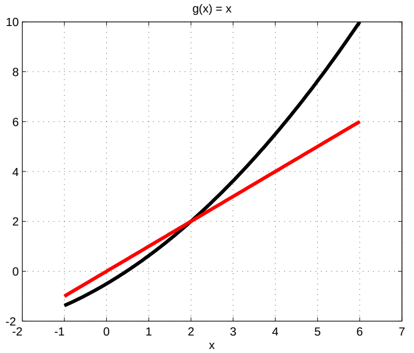
Notes

Ecuaţii algebrice neliniare - formularea problemei
Metode de rezolvare numerică - prin încadrare
Metode de rezolvare numerică - prin interpolare
Metode de rezolvare numerică - prin iteraţii de punct fix
Metode hibride
Metoda iteraţiei simple
Metoda Newton (a tangentelor)
Metoda secantelor

Metoda iteraţiei simple - convergenţa

Teoremă - condiţie suficientă de convergenţă

Dacă f este derivabilă şi $|g'| < 1 \Rightarrow$ iteraţii convergente.



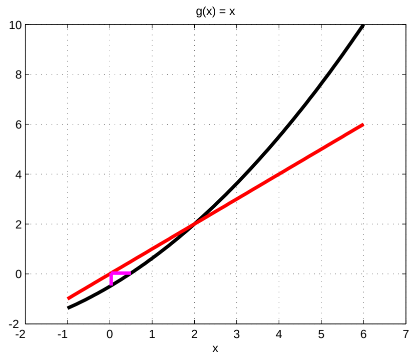
Divergent

Notes

Metoda iteraţiei simple - convergenţa

Teoremă - condiţie suficientă de convergenţă

Dacă f este derivabilă şi $|g'| < 1 \Rightarrow$ iteraţii convergente.



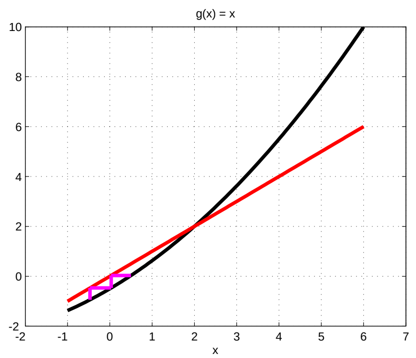
Divergent

Notes

Metoda iteraţiei simple - convergenţa

Teoremă - condiţie suficientă de convergenţă

Dacă f este derivabilă şi $|g'| < 1 \Rightarrow$ iteraţii convergente.



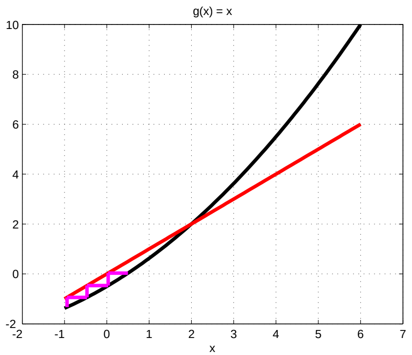
Divergent

Notes

Metoda iteraţiei simple - convergenţa

Teoremă - condiţie suficientă de convergenţă

Dacă f este derivabilă şi $|g'| < 1 \Rightarrow$ iteraţii convergente.



Divergent

Notes

Metoda iteraţiei simple - convergenţa

Condiţia $|g'| < 1$ este echivalentă cu:

$$|1 + cf'(x)| < 1, \quad x \in [a, b]. \tag{11}$$

$\Rightarrow$ importanţa constantei c

Cu cât $|g'| = |1 + cf'(x)|$ este mai mic, cu atât şirul iterativ este mai rapid convergent.

Notăm L o margine a derivatei $|g'|(x) \leq L$.

$$|x_1 - x^*| = |g(x_0) - g(x^*)| = |g'(\zeta)(x_0 - x^*)| \leq L|x_0 - x^*|$$

$$|x_2 - x^*| \leq L|x_1 - x^*| \leq L^2|x_0 - x^*|$$

$$|x_3 - x^*| \leq L|x_2 - x^*| \leq L^3|x_0 - x^*|$$

$$\vdots$$

$$|x_k - x^*| \leq L^k|x_0 - x^*| \tag{12}$$

Notes

Metoda iteraţiei simple - condiţia de oprire

Eroarea $|x_n - x^*|$ - nu se poate calcula
Reziduul $|f(x_n)|$ - se poate calcula, dar trebuie corelat cu numărul de condiţionare

$$f(x_n) - f(x^*) = f'(\zeta)(x_n - x^*)$$

$$|x_n - x^*| = \frac{1}{f'(\zeta)}|f(x_n)|$$

$$|x_n - x^*| \leq \hat{k}|f(x_n)|$$

Notes

Metoda iteraţiei simple - condiţia de oprire

Dar

$$|x_n - x_{n-1}| = |g(x_{n-1}) - x_{n-1}| = |x_{n-1} + cf(x_{n-1}) - x_{n-1}| = |cf(x_{n-1})|$$

Dacă c e corelat cu inversa derivatei, atunci cel mai natural criteriu de oprire este

$$|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon$$

unde ε este parametru de intrare (impus de utilizator).

Notes

Metoda Newton

c se alege a.î. viteza de convergenţă să fie maximă:

$$1 + c_k f'(x_k) = 0$$

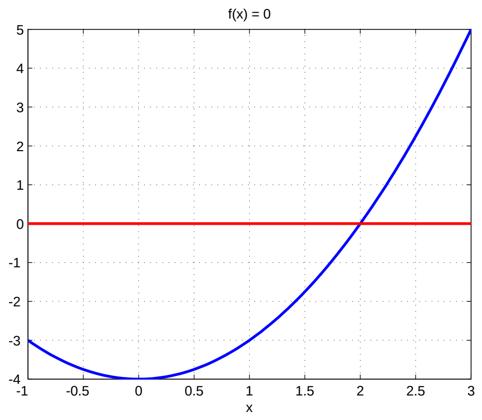
$$c_k = -\frac{1}{f'(x_k)}. \tag{13}$$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \quad k = 1, 2, \dots \tag{14}$$

Semnificaţie geometrică: La fiecare iteraţie graficul funcţiei este aproximat cu tangenta dusă în punctul de coordonate $x_k, f(x_k)$.
OBS: Metoda eşuează dacă tangenta are panta zero.

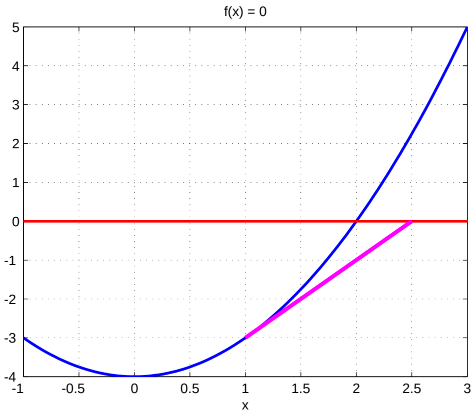
Notes

Metoda Newton



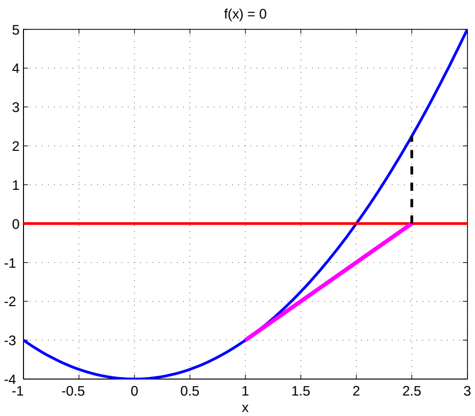
Notes

Metoda Newton



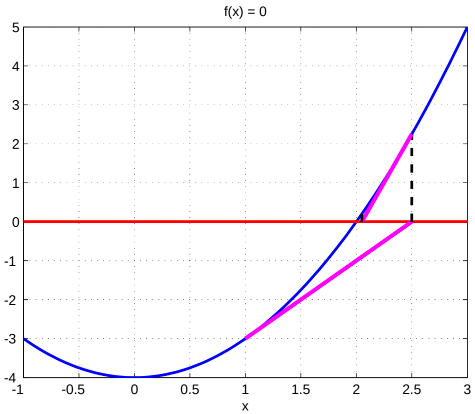
Notes

Metoda Newton



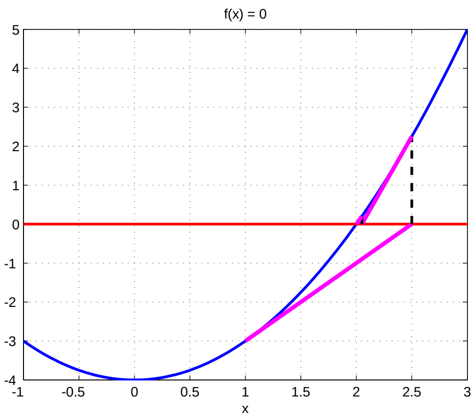
Notes

Metoda Newton



Notes

Ecuaţii algebrice neliniare - formularea problemei
Metode de rezolvare numerică - prin încadrare
Metode de rezolvare numerică - prin interpolare
Metode de rezolvare numerică - prin iteraţii de punct fix
Metode hibride
Metoda iteraţiei simple
Metoda Newton (a tangentelor)
Metoda secantelor
Metoda Newton



31/47
Gabriela Ciuprina
Ecuaţii şi sisteme algebrice neliniare
Notes

Metoda Newton

Justificare: Ecuaţia dreptei tangente:

$$y = f'(x)(x - x_k) + f(x_k), \tag{15}$$

Intersecţia tangentei cu axa orizontală:

$$y = 0 \Rightarrow x = x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

Obs: la fiecare iteraţie trebuie evaluată derivata $f'(x_k)$, ceea ce poate necesita un efort mare de calcul.
:(
Ce se poate face pentru diminuarea efortului de calcul?

Notes

Metoda tangentelor paralele

Variantă simplificată metoda **Newton-Kantorovici (a tangentelor paralele)**

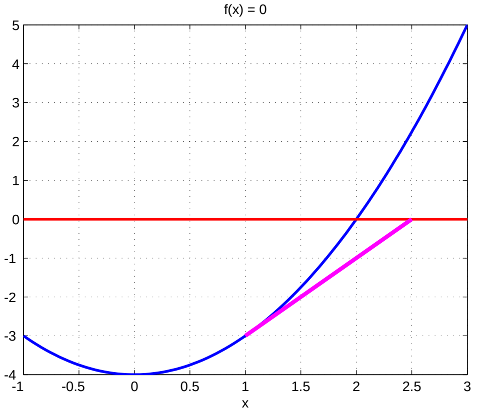
$$c = -1/f'(x_0)$$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_0)} \tag{16}$$

Semnificaţia geometrică?

Notes

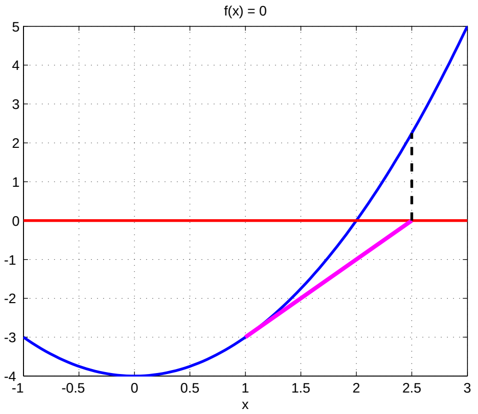
Metoda tangentelor paralele



Notes

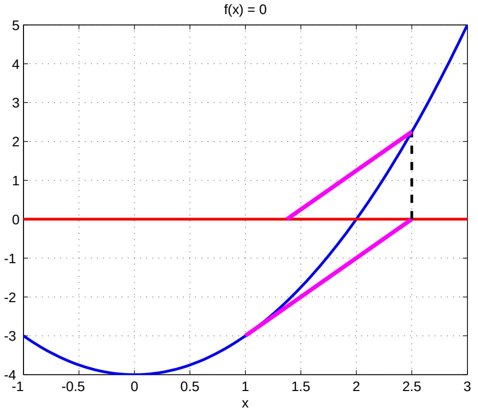
Ecuaţii algebrice neliniare - formularea problemei
Metode de rezolvare numerică - prin încadrare
Metode de rezolvare numerică - prin interpolare
Metode de rezolvare numerică - prin iteraţii de punct fix
Metode hibride
Metoda iteraţiei simple
Metoda Newton (a tangentelor)
Metoda secantelor

Metoda tangentelor paralele



Notes

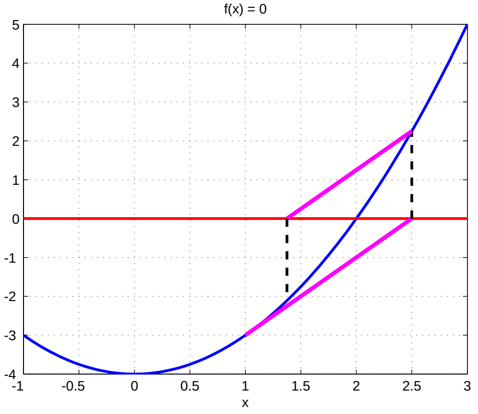
Metoda tangentelor paralele



Notes

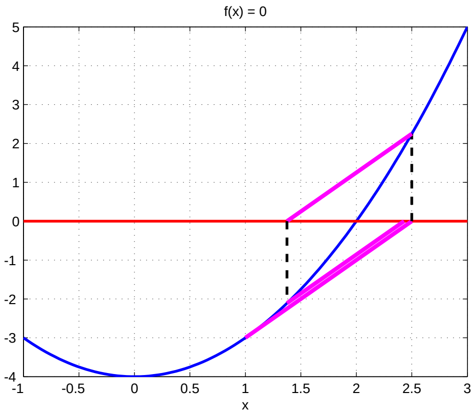
Ecuaţii algebrice neliniare - formularea problemei
Metode de rezolvare numerică - prin încadrare
Metode de rezolvare numerică - prin interpolare
Metode de rezolvare numerică - prin iteraţii de punct fix
Metode hibride
Metoda iteraţiei simple
Metoda Newton (a tangentelor)
Metoda secantelor

Metoda tangentelor paralele



Notes

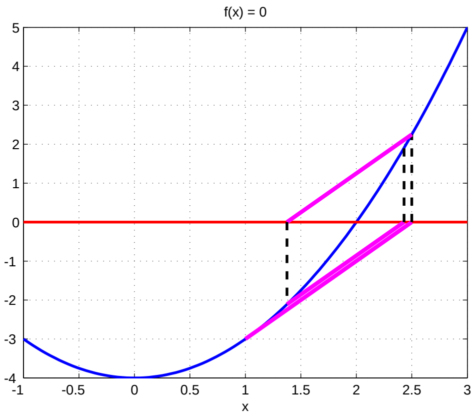
Metoda tangentelor paralele



Notes

Ecuaţii algebrice neliniare - formularea problemei
Metode de rezolvare numerică - prin încadrare
Metode de rezolvare numerică - prin interpolare
Metode de rezolvare numerică - prin iteraţii de punct fix
Metode hibride
Metoda iteraţiei simple
Metoda Newton (a tangentelor)
Metoda secantelor

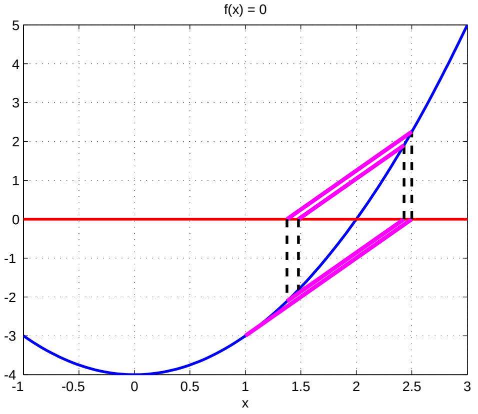
Metoda tangentelor paralele



34/47
Gabriela Ciuprina
Ecuaţii şi sisteme algebrice neliniare

Notes

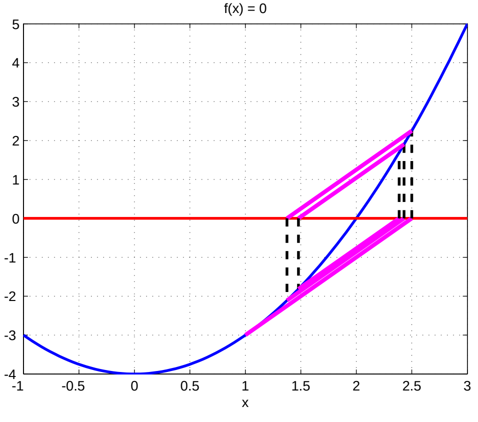
Metoda tangentelor paralele



Notes

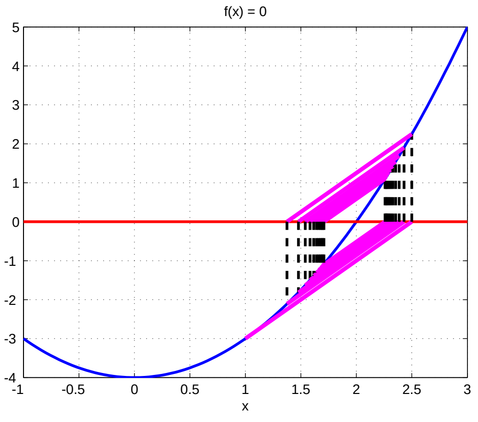
Ecuaţii algebrice neliniare - formularea problemei
Metode de rezolvare numerică - prin încadrare
Metode de rezolvare numerică - prin interpolare
Metode de rezolvare numerică - prin iteraţii de punct fix
Metode hibride
Metoda iteraţiei simple
Metoda Newton (a tangentelor)
Metoda secantelor

Metoda tangentelor paralele



Notes

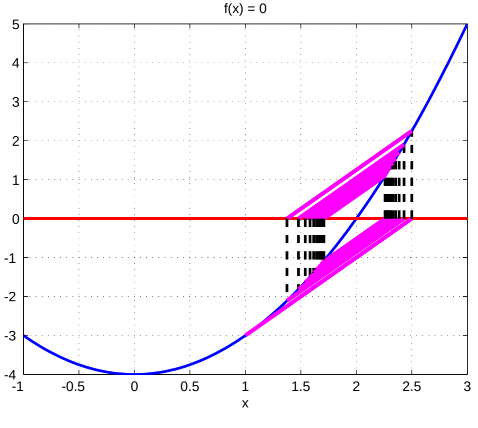
Metoda tangentelor paralele



Notes

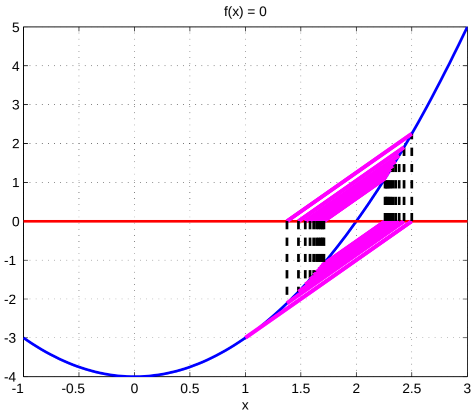
Ecuaţii algebrice neliniare - formularea problemei
Metode de rezolvare numerică - prin încadrare
Metode de rezolvare numerică - prin interpolare
Metode de rezolvare numerică - prin iteraţii de punct fix
Metode hibride
Metoda iteraţiei simple
Metoda Newton (a tangentelor)
Metoda secantelor

Metoda tangentelor paralele



Notes

Metoda tangentelor paralele



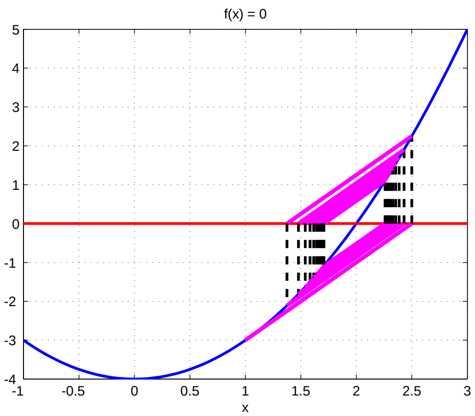
- S-a redus efortul de calcul, dar doar pentru o iteraţie

Notes

Ecuaţii algebrice neliniare - formularea problemei
Metode de rezolvare numerică - prin încadrare
Metode de rezolvare numerică - prin interpolare
Metode de rezolvare numerică - prin iteraţii de punct fix
Metode hibride

Metoda iteraţiei simple
Metoda Newton (a tangentelor)
Metoda secantelor

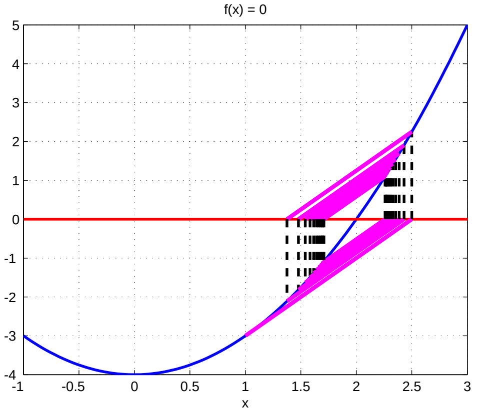
Metoda tangentelor paralele



- S-a redus efortul de calcul, dar doar pentru o iteraţie
- Rămâne necesitatea de a avea o expresie analitică pentru derivată $f'(x)$.

Notes

Metoda tangentelor paralele



- S-a redus efortul de calcul, dar doar pentru o iteraţie
- Rămâne necesitatea de a avea o expresie analitică pentru derivată $f'(x)$.
- Ce se poate face dacă nu există o astfel de expresie?

Notes

Metoda secantelor

Foloseşte o aproximare numerică a derivatei

$$f'(x_k) \approx \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}, \tag{17}$$

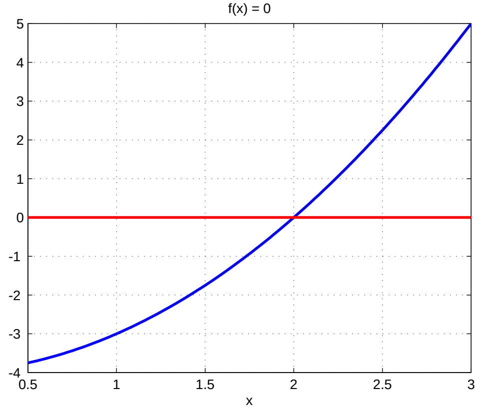
$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)(x_k - x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})} \quad k = 1, 2, \ldots \tag{18}$$

Semnificaţie geometrică: La fiecare iteraţie graficul funcţiei este aproximat cu secanta ce uneşte ultimele două puncte din şirul iterativ, având coordonatele $x_{k-1}, f(x_{k-1})$ şi respectiv $x_k, f(x_k)$.
OBS: Metoda eşuează dacă secanta are panta zero.

Notes

Metoda secantelor

Obs: funcţia de iteraţie are două variabile $x_{k+1} = g(x_k, x_{k-1})$, deci necesită o iniţializare dublă x_0, x_1 (ex: $x_0 = b, x_1 = a$).

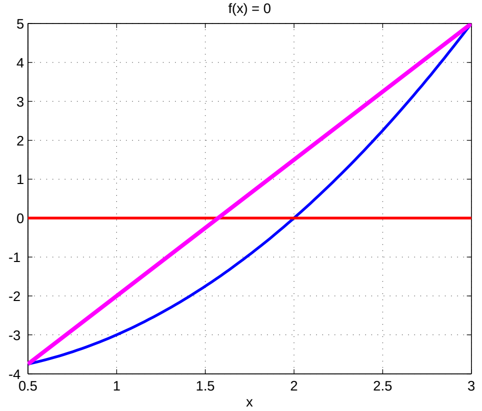


Notes

Ecuaţii algebrice neliniare - formularea problemei
Metode de rezolvare numerică - prin încadrare
Metode de rezolvare numerică - prin interpolare
Metode de rezolvare numerică - prin iteraţii de punct fix
Metode hibride
Metoda iteraţiei simple
Metoda Newton (a tangentelor)
Metoda secantelor

Metoda secantelor

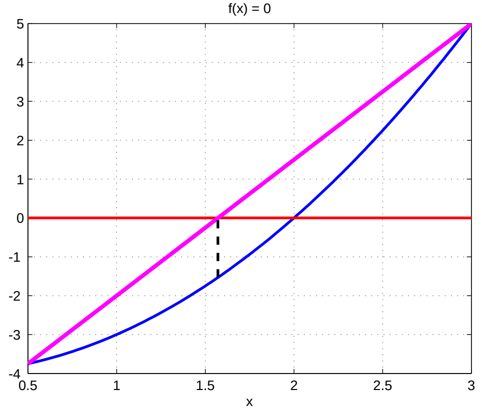
Obs: funcţia de iteraţie are două variabile $x_{k+1} = g(x_k, x_{k-1})$, deci necesită o iniţializare dublă x_0, x_1 (ex: $x_0 = b, x_1 = a$).



Notes

Metoda secantelor

Obs: funcţia de iteraţie are două variabile $x_{k+1} = g(x_k, x_{k-1})$, deci necesită o iniţializare dublă x_0, x_1 (ex: $x_0 = b, x_1 = a$).

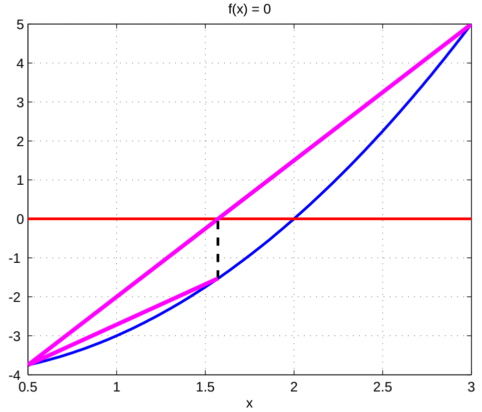


Notes

Ecuaţii algebrice neliniare - formularea problemei
Metode de rezolvare numerică - prin încadrare
Metode de rezolvare numerică - prin interpolare
Metode de rezolvare numerică - prin iteraţii de punct fix
Metode hibride
Metoda iteraţiei simple
Metoda Newton (a tangentelor)
Metoda secantelor

Metoda secantelor

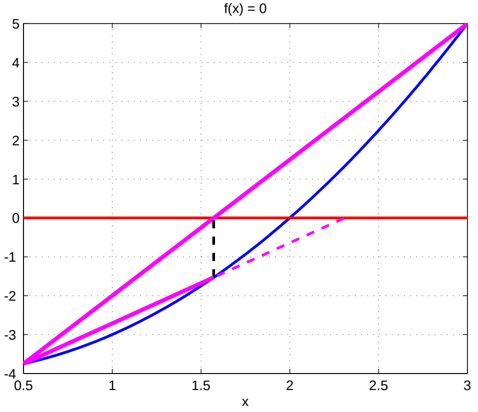
Obs: funcţia de iteraţie are două variabile $x_{k+1} = g(x_k, x_{k-1})$, deci necesită o iniţializare dublă x_0, x_1 (ex: $x_0 = b, x_1 = a$).



Notes

Metoda secantelor

Obs: funcţia de iteraţie are două variabile $x_{k+1} = g(x_k, x_{k-1})$, deci necesită o iniţializare dublă x_0, x_1 (ex: $x_0 = b, x_1 = a$).

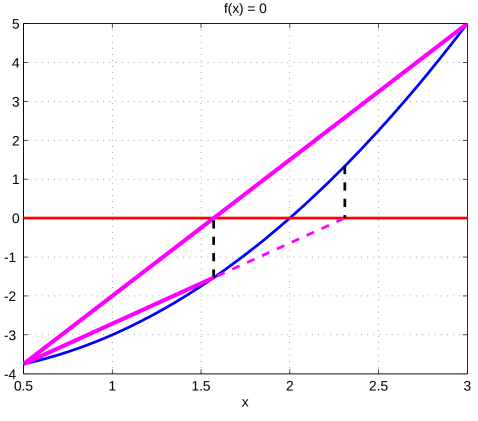


Notes

Ecuaţii algebrice neliniare - formularea problemei
Metode de rezolvare numerică - prin încadrare
Metode de rezolvare numerică - prin interpolare
Metode de rezolvare numerică - prin iteraţii de punct fix
Metode hibride
Metoda iteraţiei simple
Metoda Newton (a tangentelor)
Metoda secantelor

Metoda secantelor

Obs: funcţia de iteraţie are două variabile $x_{k+1} = g(x_k, x_{k-1})$, deci necesită o iniţializare dublă x_0, x_1 (ex: $x_0 = b, x_1 = a$).

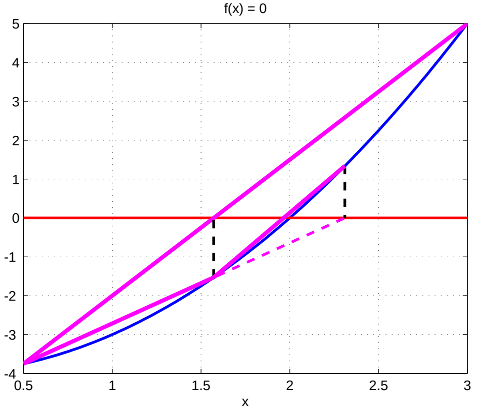


37/47
Gabriela Ciuprina
Ecuaţii şi sisteme algebrice neliniare

Notes

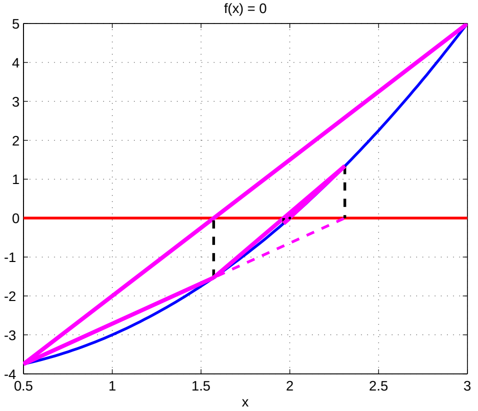
Metoda secantelor

Obs: funcţia de iteraţie are două variabile $x_{k+1} = g(x_k, x_{k-1})$, deci necesită o iniţializare dublă x_0, x_1 (ex: $x_0 = b, x_1 = a$).



Notes

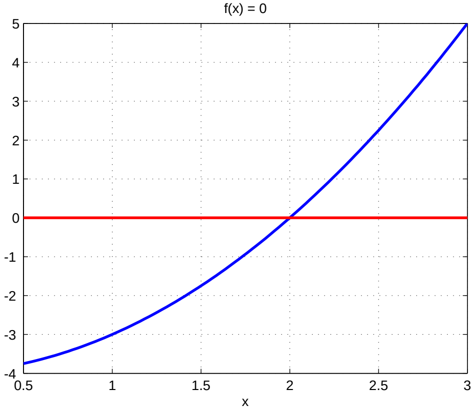
Ecuaţii algebrice neliniare - formularea problemei
Metode de rezolvare numerică - prin încadrare
Metode de rezolvare numerică - prin interpolare
Metode de rezolvare numerică - prin iteraţii de punct fix
Metode hibride
Metoda iteraţiei simple
Metoda Newton (a tangentelor)
Metoda secantelor
Metoda secantelor
Obs: funcţia de iteraţie are două variabile $x_{k+1} = g(x_k, x_{k-1})$, deci necesită o iniţializare dublă x_0, x_1 (ex: $x_0 = b, x_1 = a$).



37/47
Gabriela Ciuprina
Ecuaţii şi sisteme algebrice neliniare
Notes

Metoda secantelor

Obs: dacă: $x_0 = a, x_1 = b$.

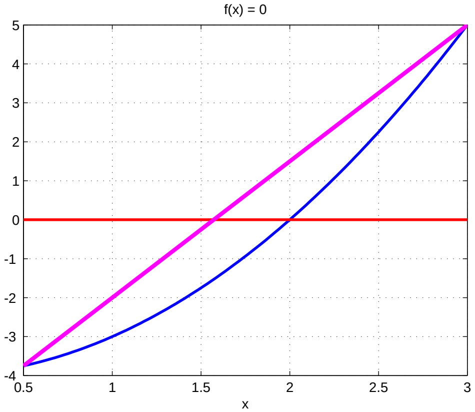


Notes

Ecuaţii algebrice neliniare - formularea problemei
Metode de rezolvare numerică - prin încadrare
Metode de rezolvare numerică - prin interpolare
Metode de rezolvare numerică - prin iteraţii de punct fix
Metode hibride
Metoda iteraţiei simple
Metoda Newton (a tangentelor)
Metoda secantelor

Metoda secantelor

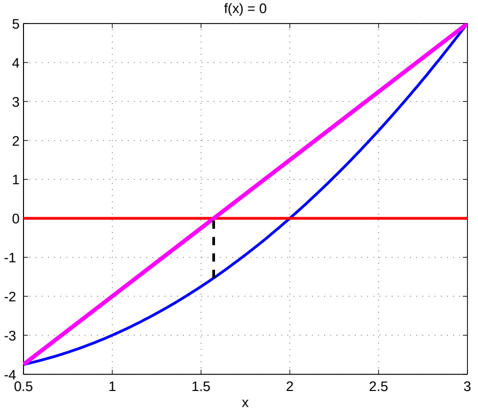
Obs: dacă: $x_0 = a, x_1 = b$.



Notes

Metoda secantelor

Obs: dacă: $x_0 = a, x_1 = b$.

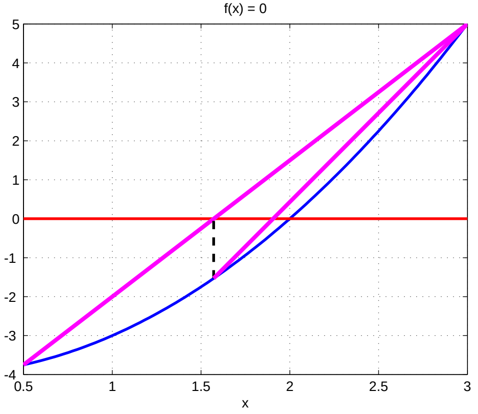


Notes

Ecuaţii algebrice neliniare - formularea problemei
Metode de rezolvare numerică - prin încadrare
Metode de rezolvare numerică - prin interpolare
Metode de rezolvare numerică - prin iteraţii de punct fix
Metode hibride
Metoda iteraţiei simple
Metoda Newton (a tangentelor)
Metoda secantelor

Metoda secantelor

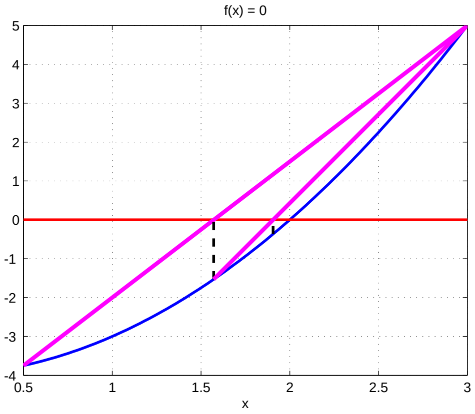
Obs: dacă: $x_0 = a, x_1 = b$.



Notes

Metoda secantelor

Obs: dacă: $x_0 = a, x_1 = b$.



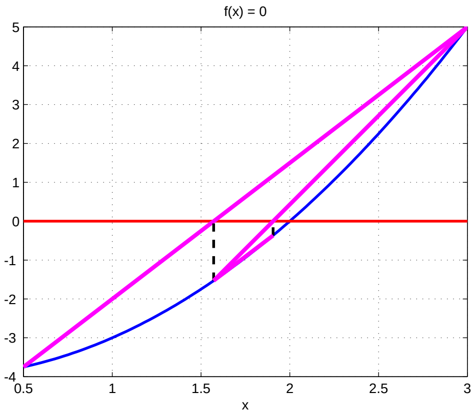
Notes

Ecuaţii algebrice neliniare - formularea problemei
Metode de rezolvare numerică - prin încadrare
Metode de rezolvare numerică - prin interpolare
Metode de rezolvare numerică - prin iteraţii de punct fix
Metode hibride

Metoda iteraţiei simple
Metoda Newton (a tangentelor)
Metoda secantelor

Metoda secantelor

Obs: dacă: $x_0 = a, x_1 = b$.

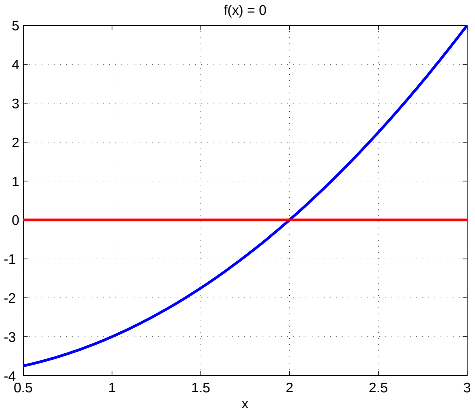


38/47
Gabriela Ciuprina
Ecuaţii şi sisteme algebrice neliniare

Notes

Metoda secantelor

Obs: variantă modificată (pentru a preveni divergenţa), se alege secanta corespunzătoare unei schimbări a semnului.

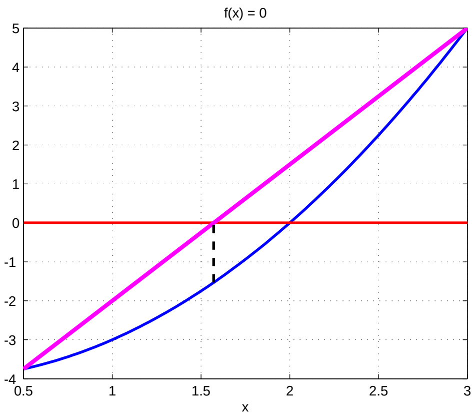


Notes

Ecuaţii algebrice neliniare - formularea problemei
Metode de rezolvare numerică - prin încadrare
Metode de rezolvare numerică - prin interpolare
Metode de rezolvare numerică - prin iteraţii de punct fix
Metode hibride
Metoda iteraţiei simple
Metoda Newton (a tangentelor)
Metoda secantelor

Metoda secantelor

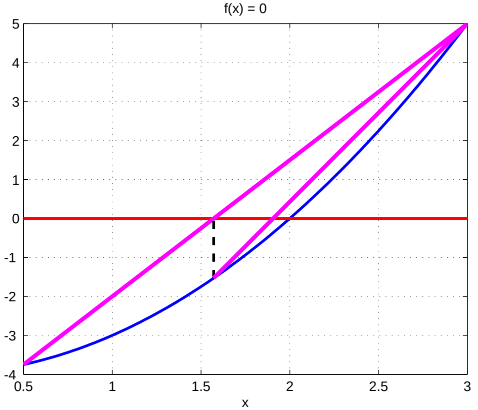
Obs: variantă modificată (pentru a preveni divergenţa), se alege secanta corespunzătoare unei schimbări a semnului.



Notes

Metoda secantelor

Obs: variantă modificată (pentru a preveni divergenţa), se alege secanta corespunzătoare unei schimbări a semnului.

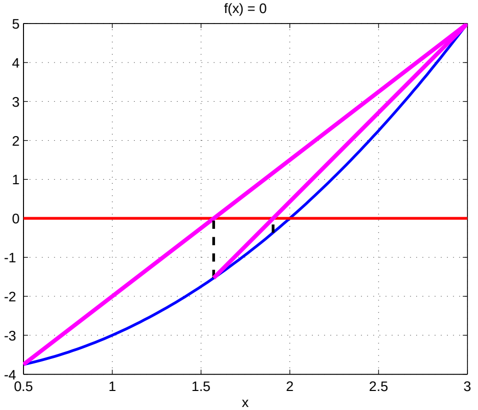


Notes

Ecuaţii algebrice neliniare - formularea problemei
Metode de rezolvare numerică - prin încadrare
Metode de rezolvare numerică - prin interpolare
Metode de rezolvare numerică - prin iteraţii de punct fix
Metode hibride
Metoda iteraţiei simple
Metoda Newton (a tangentelor)
Metoda secantelor

Metoda secantelor

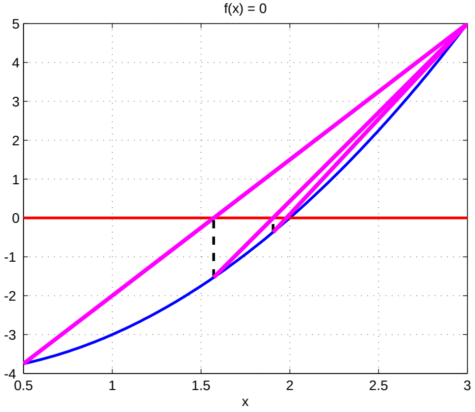
Obs: variantă modificată (pentru a preveni divergenţa), se alege secanta corespunzătoare unei schimbări a semnului.



Notes

Metoda secantelor

Obs: variantă modificată (pentru a preveni divergenţa), se alege secanta corespunzătoare unei schimbări a semnului.



Notes

Algoritmi

procedura iteraţie simplă (x_0, eps, nit)
real x_0 ; iniţializare soluţie
real eps ; eroarea impusă
întreg nit ; număr maxim de iteraţii
întreg $k = 0$; contor iteraţii
real $xvechi = x_0$; iniţializarea soluţiei
repetă
    $k = k + 1$
    $xnou = g(xvechi)$; unde g(x)=x+cf(x)
    $d = |xnou - xvechi|$
    $xvechi = xnou$
până când $d < eps$ **sau** $k > nit$
dacă $k \leq nit$
    scrie $xnou$
retur

Notes

Algoritmi

procedura Newton (x_0, eps, nit)
real x_0 ; iniţializare soluţie
real eps ; eroarea impusă
întreg nit ; număr maxim de iteraţii
întreg $k = 0$; contor iteraţii
real $xvechi = x_0$; iniţializarea soluţiei
repetă
    $k = k + 1$
    $xnou = xvechi - f(xvechi)/fder(xvechi)$
    $d = |xnou - xvechi|$
    $xvechi = xnou$
până când $d < eps$ **sau** $k > nit$
dacă $k \leq nit$
    scrie $xnou$
retur

Notes

Ecuaţii algebrice neliniare - formularea problemei
Metode de rezolvare numerică - prin încadrare
Metode de rezolvare numerică - prin interpolare
Metode de rezolvare numerică - prin iteraţii de punct fix
Metode hibride
Metoda iteraţiei simple
Metoda Newton (a tangentelor)
Metoda secantelor

Algoritmi

procedura tangente paralele (x_0, eps, nit)
real x_0 ; iniţializare soluţie
real eps ; eroarea impusă
întreg nit ; număr maxim de iteraţii
real $xvechi = x_0$; iniţializarea soluţiei
real $fd = fder(x_0)$; valoarea derivatei în x_0
repetă
    $k = k + 1$
    $xnou = xvechi - f(xvechi)/fd$
    $d = |xnou - xvechi|$
    $xvechi = xnou$
până când $d < eps$ **sau** $k > nit$
dacă $k \leq nit$
    scrie $xnou$
retur

Notes

Algoritmi

procedura secante (a, b, eps, nit)
real a, b ; domeniul de definiţie al funcţiei
real eps ; eroarea impusă
întreg nit ; număr maxim de iteraţii
întreg $k = 0$; contor iteraţii
real $xv = a$; iniţializări ale soluţiei
real $xvv = b$
repetă
    $k = k + 1$
    $xnou = xv - (xv - xvv)f(xv)/(f(xv) - f(xvv))$
    $d = |xnou - xv|$
    $xvv = xv$
    $xv = xnou$
până când $d < eps$ **sau** $k > nit$
dacă $k \leq nit$
    scrie $xnou$

Notes

Comparaţie - efortul de calcul

- Depinde de eroarea impusă soluţiei.
- Efortul pentru o iteraţie depinde de metodă.
- Operaţiile de referinţă: evaluarea funcţiei f sau a derivatei acesteia.

Metoda	Număr de evaluări pe iteraţie
Bisecţiei	2 pentru f (poate fi redusă la o evaluare)
Falsei poziţii	2 pentru f (poate fi redusă la o evaluare)
Muller	3 pentru f (poate fi redusă la o evaluare)
Interpolarea pătratică inversă	3 pentru f (poate fi redusă la o evaluare)
Iteraţia simplă	1 pentru f
Tangente paralele	1 pentru f
Newton	1 pentru f şi 1 pentru f'
Secante	2 pentru f (poate fi redusă la o evaluare)

Notes

Comparaţie - convergenţă

Bisecţia

- garantat convergentă în ipoteza schimbării semnului;
- deoarece[4] $a_k = 1/2a_{k-1}$ se spune că are convergenţă liniară.

Metoda falsei poziţii

- garantat convergentă în ipoteza schimbării semnului;
- convegenţă liniară, poate converge mai repede decât metoda bisecţiei pentru că alegerea punctului care împarte intervalul depinde de valorile funcţiei.

[4] a_k = marginea erorii absolute - revedeţi cursul despre erori

Notes

Comparaţie - convergenţă

Metodele bazate pe iteraţii

- nu sunt garantat convergente;
- viteza de convergenţă diferă de la o metodă la alta;
- metoda Newton e cea mai rapid convergentă, are convergenţă pătratică (demo pe slide-ul următor).
- metoda secantelor are o viteză de convergenţă între cea liniară şi cea pătratia ("superliniară"): $a_k \approx C a_{k-1}^{\alpha}$, $\alpha = (1+\sqrt{5})/2 \approx 1.61$. [Cheney]
- metoda Muller are o viteză de convergenţă superliniară, între secante şi Newton: $\alpha \approx 1.84$.
- metoda interpolării pătratice inverse are o viteză de convergenţă superliniară, între secante şi Newton: $\alpha \approx 1.8$.

Metoda Newton ar putea avea o eficienţă globală superioară, chiar dacă la fiecare iteraţie timpul de calcul este mai mare.

Notes

Convergenţa metodei Newton - demonstraţie

Funcţia de iteraţie $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$
Se verifică uşor că $g'(x^*) = 0$

$$g(x) = g(x^*) + (x - x^*)g'(x^*) + (x - x^*)^2 g''(\zeta)/2$$

Notes

Ecuaţii algebrice neliniare - formularea problemei
Metode de rezolvare numerică - prin încadrare
Metode de rezolvare numerică - prin interpolare
Metode de rezolvare numerică - prin iteraţii de punct fix
Metode hibride
Metoda iteraţiei simple
Metoda Newton (a tangentelor)
Metoda secantelor

Convergenţa metodei Newton - demonstraţie

Funcţia de iteraţie $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$
Se verifică uşor că $g'(x^*) = 0$

$$g(x) = g(x^*) + (x - x^*)g'(x^*) + (x - x^*)^2 g''(\zeta)/2$$

$$g(x) = g(x^*) + (x - x^*)^2 g''(\zeta)/2$$

Notes

Convergenţa metodei Newton - demonstraţie

Funcţia de iteraţie $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$
Se verifică uşor că $g'(x^*) = 0$

$$g(x) = g(x^*) + (x - x^*)g'(x^*) + (x - x^*)^2 g''(\zeta)/2$$

$$g(x) = g(x^*) + (x - x^*)^2 g''(\zeta)/2$$

$$g(x_{k-1}) = g(x^*) + (x_{k-1} - x^*)^2 g''(\zeta)/2$$

Notes

Ecuaţii algebrice neliniare - formularea problemei
Metode de rezolvare numerică - prin încadrare
Metode de rezolvare numerică - prin interpolare
Metode de rezolvare numerică - prin iteraţii de punct fix
Metode hibride
Metoda iteraţiei simple
Metoda Newton (a tangentelor)
Metoda secantelor

Convergenţa metodei Newton - demonstraţie

Funcţia de iteraţie $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$
Se verifică uşor că $g'(x^*) = 0$

$$g(x) = g(x^*) + (x - x^*)g'(x^*) + (x - x^*)^2 g''(\zeta)/2$$

$$g(x) = g(x^*) + (x - x^*)^2 g''(\zeta)/2$$

$$g(x_{k-1}) = g(x^*) + (x_{k-1} - x^*)^2 g''(\zeta)/2$$

$$x_k = x^* + (x_{k-1} - x^*)^2 g''(\zeta)/2$$

Notes

Convergenţa metodei Newton - demonstraţie

Funcţia de iteraţie $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$
Se verifică uşor că $g'(x^*) = 0$

$$g(x) = g(x^*) + (x - x^*)g'(x^*) + (x - x^*)^2 g''(\zeta)/2$$

$$g(x) = g(x^*) + (x - x^*)^2 g''(\zeta)/2$$

$$g(x_{k-1}) = g(x^*) + (x_{k-1} - x^*)^2 g''(\zeta)/2$$

$$x_k = x^* + (x_{k-1} - x^*)^2 g''(\zeta)/2$$

$$|x_k - x^*| \leq M|(x_{k-1} - x^*)|^2 \qquad (19)$$

Notes

Ecuaţii algebrice neliniare - formularea problemei
Metode de rezolvare numerică - prin încadrare
Metode de rezolvare numerică - prin interpolare
Metode de rezolvare numerică - prin iteraţii de punct fix
Metode hibride
Metoda iteraţiei simple
Metoda Newton (a tangentelor)
Metoda secantelor

Convergenţa metodei Newton - demonstraţie

Funcţia de iteraţie $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$
Se verifică uşor că $g'(x^*) = 0$

$$g(x) = g(x^*) + (x - x^*)g'(x^*) + (x - x^*)^2 g''(\zeta)/2$$

$$g(x) = g(x^*) + (x - x^*)^2 g''(\zeta)/2$$

$$g(x_{k-1}) = g(x^*) + (x_{k-1} - x^*)^2 g''(\zeta)/2$$

$$x_k = x^* + (x_{k-1} - x^*)^2 g''(\zeta)/2$$

$$|x_k - x^*| \leq M|(x_{k-1} - x^*)|^2 \qquad (19)$$

q.e.d.

44/47
Gabriela Ciuprina
Ecuaţii şi sisteme algebrice neliniare

Notes

Metode hibride

Metoda Brent-Dekker

- Combină 3 metode: bisecţia, secantelor şi interpolarea pătratică inversă;
- Are robusteţea dată de bisecţie dar poate fi rapid convergentă ca metoda secantelor sau interpolarea pătratică inversă.

Pentru detalii consultaţi
https://en.wikipedia.org/wiki/Brent%27s_method
Această metodă este implementată în funcţia `fzero` din Matlab.

Notes

Metode hibride

Cea mai rapid convergentă metodă este metoda Newton, dar ea necesită:

1. o iniţializare in interiorul razei de convergenţă (suficient de aproape de soluţie);
2. o expresie pentru evaluarea derivatei.

Presupunând că există o expresie care permite evaluarea derivatei, o altă idee de a combina metodele prezentate este de a folosi la început un algoritm care nu necesită evaluarea derivatei (metode de ordin zero), urmând a comuta în final pe iteraţii Newton (metode de ordinul unu).

Notes

Referinţe

- [Ioan98] D. Ioan et al., *Metode numerice în ingineria electrică*, Ed. Matrix Rom, Bucuresti, 1998. (Capitolul 16)
- [Cheney] Ward Cheney and David Kincaid, *Numerical Mathematics and Computing*, Brooks/Cole publishing Company,2000.
- [Heath] Michael Heath, *Scientific computing. An Introductory Survey*, McGraw Hill 2002 (capitolul 5 din carte) şi alte resurse de la

  disponibilă la http://heath.cs.illinois.edu/scicomp/

Notes

Notes