Algoritmi numerici pentru analiza circuitelor electrice liniare (c.c. şi c.a.)

Prof.dr.ing. Gabriela Ciuprina

Universitatea "Politehnica" Bucureşti, Facultatea de Inginerie Electrică, Departamentul de Electrotehnică

Suport didactic pentru disciplina *Algoritmi numerici*, *Facultatea de Inginerie Electrică*, 2017-2018

Notes

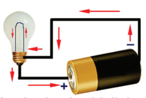
Cuprins

Notes

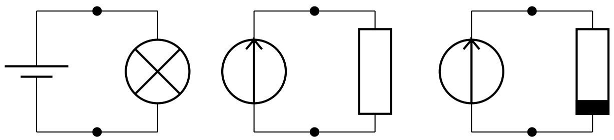
Circuitele electrice sunt modele ale realităţii

Circuitele electrice

- modele ale realităţii;
- conţin elemente ideale, obţinute prin idealizarea elementelor reale;
- reprezintă o mulţime de elemente ideale conectate între ele pe la borne (terminale).



Simple circuit with light



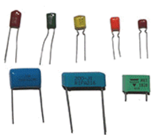
Notes

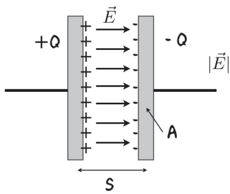
Circuitele electrice sunt alcătuite din elemente ideale

Elementele ideale de circuit electric

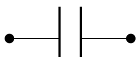
- sunt caracterizate de mărimi electrice definite la borne (curenţi, tensiuni sau potenţiale);
- se definesc funcţional, printr-o relaţie caracteristică (constitutivă) între mărimile definite la borne.

Modelarea nu este obiectul teoriei circuitelor, ea presupune analiza câmpului electromagnetic.





$|\vec{E}| = \frac{Q/A}{\epsilon_0}$



$C = \frac{\epsilon_0 A}{s}$

Notes

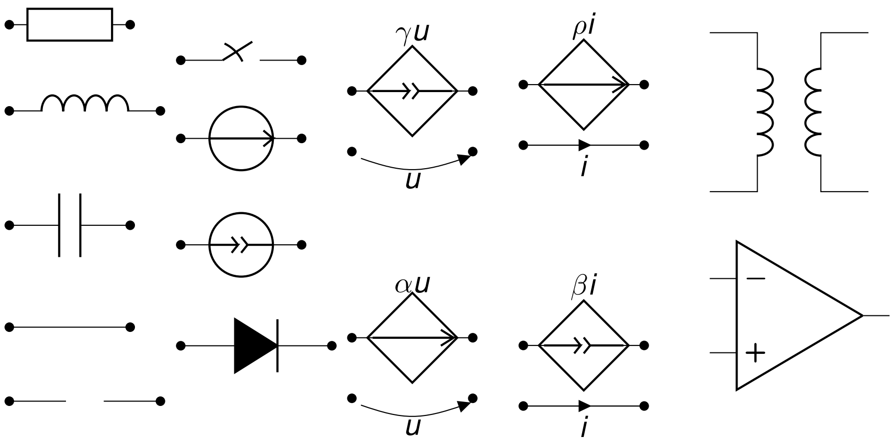
Exemple de elemente ideale

Cele mai frecvent folosite:

- liniare dipolare: R, L, C, conductorul şi izolatorul perfect;
- parametrice: K (comutatorul);
- neliniare rezistive : SIT, SIC, DP;
- liniare multipolare: SICU, SUCI, SUCU, SICI, AOP, M;
- neliniare multipolare: AOPn.

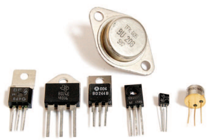
Notes

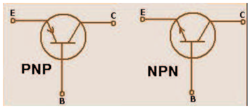
Exemple de elemente ideale

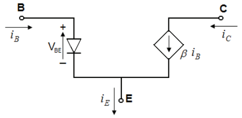


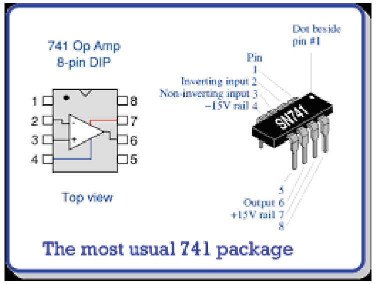
Notes

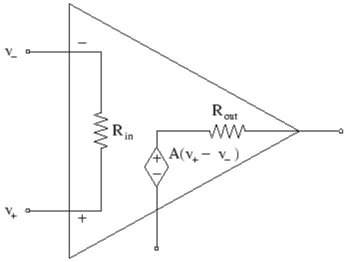
Modelarea componentelor din circuitele reale











Notes

Determinarea răspunsului sub acţiunea unei excitaţii

Simulare = simulare numerică (cu ajutorul calculatorului)

Simularea

- determinarea mărimilor de interes (tensiuni, curenţi) din circuit;
- determinarea răspunsului sub acţiunea unui semnal de excitaţie cunoscut.

Notes

Determinarea răspunsului sub acţiunea unei excitaţii

O simulare făcută cu succes presupune

- buna formulare a circuitului (soluţia să existe şi să fie unică); este echivalentă cu buna formulare a problemei matematice asociate;
- conceperea sau alegerea unui algoritm numeric robust pentru rezolvare.

Notes

Algoritmul de rezolvare

Algoritmul potrivit pentru rezolvare depinde de

- caracteristicile elementelor de circuit (liniare/neliniare, rezistive/reactive);
- tipul mărimilor din circuit (constante - c.c., sinusoidale - c.a., periodice, oarecare).

Notes

Tipuri de circuite / probleme matematice

Tip de circuit

1. Circuite rezistive liniare/neliniare în c.c.)
2. Circuite liniare în regim sinusoidal (c.a.);
3. Circuite liniare/neliniare în regim tranzitoriu;
4. Circuite liniare/neliniare în regim periodic;
5. Oscilatoare (frecvenţe de rezonantă.)

Problema matematică

1. Sisteme de ec. algebrice liniare/neliniare, în $\mathbb{R}$;
2. Sisteme de ec. algebrice liniare, în complex.
3. Sisteme ODE, lin./nelin. cu condiţii iniţiale.
4. Superpoziţie de c.a./ODE cu condiţii de periodicitate.
5. Calcul de valori proprii (analiza modală).

Notes

Scopul acestui curs

Întelegerea:

- modului în care se dezvoltă instrumentele software pentru analiza circuitelor electrice;
- importanţei bunei formulări a problemei (circuitului) ce trebuie rezolvată;
- modului în care se generează automat sistemele de rezolvat;
- faptului că fundamentul simulării numerice a circuitelor electrice îl constituie disciplina *Metode numerice* $\Rightarrow$ *Algoritmi*.

Notes

Problema fundamentală

Conţin: rezistoare (R), surse ideale de tensiune (SIT) şi curent (SIC), surse comandate liniar (SUCU, SUCI, SICU, SUCI).

Problema fundamentală a analizei acestor circuite

Se dau:

- topologia circuitului (schemă/tabel de descriere (netlist)/matrice de incidenţă sau apartenenţă);
- valorile parametrilor (rezistenţele, valorile surselor).

Se cer:

- curenţii şi tensiunile din fiecare latură;
- puteri.

Notes

Condiţii de bună formulare

Teoreme

Topologice:

- Pentru ca circuitul să fie bine formulat este necesar să existe un arbore normal;
- Dacă circuitul nu are surse comandate şi toate rezistoarele sunt strict pozitive, atunci este necesar şi suficient să existe un arbore normal.

Algebrice:

- Pentru ca circuitul să fie bine formulat este necesar şi suficient ca matricea sistemului de ecuaţii algebrice liniare, asamblat printr-o metodă sistematică să fie nesingulară.

Q1: Ce este un arbore normal?

Notes

Metode de rezolvare sistematice

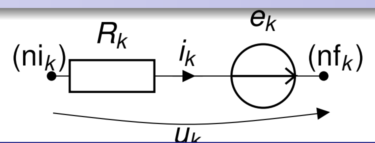
- metoda ecuaţiilor Kirchhoff :(
- metoda potenţialelor nodurilor :) (dacă nu sunt surse comandate matricea coeficienţilor este simetrică şi diagonal dominantă)
- metoda curenţilor ciclici :| (dacă nu sunt surse comandate matricea este simetrică, necesită definirea unui sistem de bucle independente convenabil ales)

$\Longrightarrow$ metoda potenţialelor nodurilor (*"tehnica nodală"*)

Notes

Tratarea SRT

Laturi standard:



Formularea problemei

Se dau:

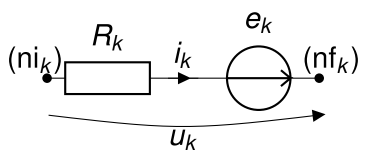
- topologia: N, L, $(ni_k, nf_k, k = 1, \ldots, L)$;
- toate rezistenţele R_k, $k = 1, \ldots, L$, presupuse nenule,
- toate t.e.m. e_k, $k = 1, \ldots, L$

Se cer:

- u_k $k = 1, \ldots, L$
- i_k $k = 1, \ldots, L$
- puterea consumată şi puterea generată în circuit.

Notes

Ecuaţii



Kirchhoff clasic:

$$\sum_{k \in (n)}^{A} i_k = 0, \quad n = 1, \ldots, N-1, \tag{1}$$

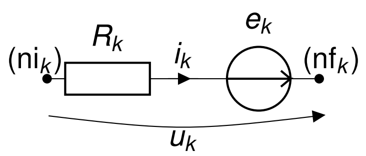
$$\sum_{k \in [b]}^{A} u_k = 0, \quad b = 1, \ldots, L-N+1, \tag{2}$$

$$u_k = R_k i_k - e_k, \quad k = 1, \ldots, L, \tag{3}$$

$2L$ ecuaţii cu $2L$ necunoscute

Notes

Necunoscute



Schimbare de variabilă - necunoscutele sunt:
v_k, $k = 1, \ldots, N$, $\quad v_N = 0$ (prin convenţie)
Kirchhoff II:

$$\sum_{k \in [b]}^{A} u_k = 0, \quad b = 1, \ldots, L-N+1, \tag{4}$$

$\Longleftrightarrow$

$$u_k = v_{\mathrm{ni}_k} - v_{\mathrm{nf}_k}, \quad k = 1, \ldots, L. \tag{5}$$

Notes

Notaţii

$$\begin{array}{rcl}\mathbf{u} & = & [\ u_1\quad u_2\quad \dots\quad u_L\ ]^T \in \mathbb{R}^{L\times 1} \\ \mathbf{i} & = & [\ i_1\quad i_2\quad \dots\quad i_L\ ]^T \in \mathbb{R}^{L\times 1} \\ \mathbf{v} & = & [\ v_1\quad v_2\quad \dots\quad v_{N-1}\ ]^T \in \mathbb{R}^{N-1\times 1} \\ \mathbf{e} & = & [\ e_1\quad e_2\quad \dots\quad e_L\ ]^T \in \mathbb{R}^{L\times 1} \\ \mathbf{R} & = & \mathrm{diag}([\ R_1\quad R_2\quad \dots\quad R_L\ ]) \in \mathbb{R}^{L\times L}\end{array} \tag{6}$$

Kirchhoff I:

$$\mathbf{Ai} = \mathbf{0}, \tag{7}$$

$\mathbf{A} = (a_{ij})_{i=1,N-1;j=1,L}$ este matricea incidenţelor laturi-noduri - matrice topologică, $(N-1)\times L$

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{dacă nodul } i \text{ nu aparţine laturii } j; \\ +1 & \text{dacă nodul } i \text{ este nod iniţial pentru latura } j; \\ -1 & \text{dacă nodul } i \text{ este nod final pentru latura } j. \end{cases}$$

Notes

Ecuaţii scrise compact

Kirchhoff I (KCL):

$$\mathbf{Ai} = \mathbf{0}, \tag{8}$$

Kirchhoff II (KVL):

$$\mathbf{u} = \mathbf{A}^T\mathbf{v}, \tag{9}$$

Joubert (relaţii constitutive):

$$\mathbf{u} = \mathbf{Ri} - \mathbf{e}. \tag{10}$$

Dacă $\mathbf{R}$ este inversabilă ($R_k \neq 0, \forall k = 1, L$)

$$\mathbf{i} = \mathbf{R}^{-1}(\mathbf{u} + \mathbf{e}). \tag{11}$$

$$\mathbf{AR}^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{v} = -\mathbf{AR}^{-1}\mathbf{e}. \tag{12}$$

$$\mathbf{G}_n\mathbf{v} = \mathbf{j}_n. \tag{13}$$

Notes

Sistem de ecuaţii

$$\mathbf{G}_n \mathbf{v} = \mathbf{j}_n. \tag{14}$$

$\mathbf{G}_n$ conductanţe nodale; $\mathbf{j}_n$ injecţii de curent în noduri.

$$\mathbf{G}_n = \mathbf{A}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{A}^T \quad \in \mathbb{R}^{(N-1)\times(N-1)} \tag{15}$$

$$G_{nii} = \sum_{k\in(i)} \frac{1}{R_k}, \quad G_{nij} = -\sum_{k\in(i);k\in(j)} \frac{1}{R_k} \quad \text{pentru} \quad i \neq j.$$

$$\mathbf{j}_n = -\mathbf{A}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{e} \quad \in \mathbb{R}^{(N-1)\times 1} \tag{16}$$

$$j_{nk} = \sum_{m\in(k)} \frac{A\, e_m}{R_m}$$

Notes

Proprietăţile matricei $\mathbf{G}_n$

$\mathbf{G}_n$: simetrică, diagonal dominantă şi pozitiv definită dacă rezistenţele sunt pozitive

$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ este pozitiv definită dacă ea este simetrică şi dacă $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} > 0$ pentru orice vector real, nenul $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$.

$$\mathbf{R}^{-1} = \mathrm{diag}([\ 1/R_1 \quad 1/R_2 \quad \ldots \quad 1/R_L\ ]). \tag{17}$$

Simetria:

$$\mathbf{G}_n^T = \left(\mathbf{A}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{A}^T\right)^T = \left(\mathbf{A}^T\right)^T \left(\mathbf{R}^{-1}\right)^T (\mathbf{A})^T = \mathbf{A}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{A}^T = \mathbf{G}_n$$

Pozitiv definire: Fie $\mathbf{x}$ vector coloană arbitrar, nenul.

$$\mathbf{x}^T\mathbf{G}_n\mathbf{x} = \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{x} = \mathbf{y}^T\mathbf{R}^{-1}\mathbf{y} = \sum_{k=1}^{L} \frac{y_k^2}{R_k} > 0,$$

unde $\mathbf{y} = \mathbf{A}^T\mathbf{x}$ are componentele y_k, $k = 1, \ldots, L$.

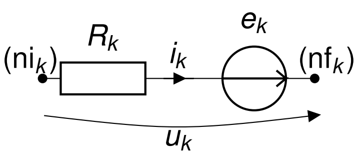
Notes

Etapele algoritmului

- etapa de preprocesare în care se descrie problema şi se asamblează sistemul de ecuaţii de rezolvat;
- etapa de rezolvare în care se apelează o procedură propriu-zisă de rezolvare a sistemului de ecuaţii rezultat ("solver");
- etapa de postprocesare în care se calculează alte mărimi de interes.

Notes

Structuri de date



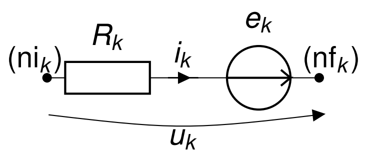

```
; declaratii date - varianta A
întreg N                    ; număr de noduri
întreg L                    ; număr de laturi
tablou întreg ni[L]         ; noduri iniţiale ale laturilor
tablou întreg nf[L]         ; noduri finale ale laturilor
tablou real R[L]            ; rezistenţe
tablou real e[L]            ; tensiuni electromotoare
```

În vederea obţinerii unui algoritm simplu, vom presupune că:

- sensul de referinţă al curentului unei laturi este identic cu cel al t.e.m de pe latură;
- toate laturile sunt orientate cf. regulii de la receptoare.

Notes

Structuri de date



Se recomandă agregarea datelor:

```
; declaraţii date - varianta B
înregistrare circuit
        întreg N                  ; număr de noduri
        întreg L                  ; număr de laturi
        tablou întreg ni[L]       ; noduri iniţiale ale laturilor
        tablou întreg nf[L]       ; noduri finale ale laturilor
        tablou real R[L]          ; rezistenţe
        tablou real e[L]          ; tensiuni electromotoare
```

-

Notes

Matrice rare

$\mathbf{G}_n$ şi $\mathbf{j}_n$ sunt foarte rare.

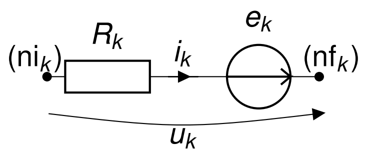
Exemplu:
dacă pp. 4 laturi care concură la un nod, atunci densitatea matricei
$d = 5n/n^2 = 5/n$, (pentru $n \approx 1000 \Rightarrow d = 0.5$ %).

Pentru simplitate:

```
; declaraţii variabile utile
tablou real Gn[N, N]  ; stocată rar
tablou real jn[N]     ; stocat rar
tablou real v[N]      ; vectorul potenţialelor
```


Notes

Citire date

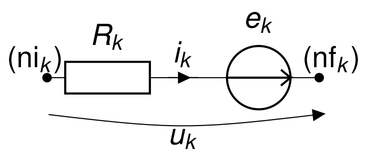


<u>`funcţie`</u> citire_date_B ()
; declaraţii
...
<u>`citeşte`</u> circuit.N, circuit.L
<u>`pentru`</u> $k = 1$,circuit.L
    <u>`citeşte`</u> circuit.ni$_k$, circuit.nf$_k$
    <u>`citeşte`</u> circuit.R_k, circuit.e_k
•
<u>`întoarce`</u> circuit

Notes

Asamblarea sistemului de ecuaţii

Orientată pe laturi:

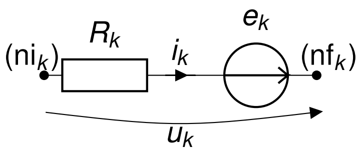


$$
\begin{array}{c|ccccccc}
 & & \mathrm{ni}_k & & & \mathrm{nf}_k & & \\
\hline
 & * & * & * & * & * & * & * \\
\mathrm{ni}_k & * & +1/R_k & * & * & -1/R_k & * & * \\
 & * & * & * & * & * & * & * \\
 & * & * & * & * & * & * & * \\
\mathrm{nf}_k & * & -1/R_k & * & * & +1/R_k & * & * \\
 & * & * & * & * & * & * & * \\
 & * & * & * & * & * & * & *
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c|c}
 & \\
\hline
 & * \\
\mathrm{ni}_k & -e_k/R_k \\
 & * \\
 & * \\
\mathrm{nf}_k & +e_k/R_k \\
 & * \\
 & *
\end{array}
$$

Contribuţia unei laturi k la matricea conductanţelor nodale (stânga) şi la vectorul injecţiilor de curent (dreapta).

Notes

Preprocesare

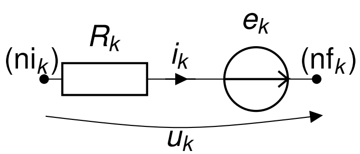


procedură nodalRE_v1 (circuit, *Gn*, *t*)
; asamblează sistemul de ecuaţii pentru un circuit
; cu laturi de tip R,E folosind tehnica nodală
; parametri de intrare:
; circuit - structură de date ce descrie circuitul
; parametri de ieşire:
; *Gn* - matricea conductanţelor nodale şi
; *jn* - vectorul injecţiilor de curent
; declaraţii
....
$L = \mathrm{circuit}.L$; pentru simplificarea scrierii algoritmului
$N = \mathrm{circuit}.N$
ni = circuit.ni
nf = circuit.nf
$R = \mathrm{circuit}.R$
$e = \mathrm{circuit}.e$

Notes

Introducere
Analiza în c.c.
Analiza în c.a.
Formularea problemei
Metoda nodală clasică
MNA

Preprocesare



procedură nodalRE_v1 (circuit, *Gn*, *jn*)
....
$\mathbf{Gn} = \mathbf{0}$
$\mathbf{jn} = \mathbf{0}$
; asamblează sistem
pentru $k = 1, L$; parcurge laturi
$i = \mathrm{ni}_k$; nodul iniţial al laturii *k*
$j = \mathrm{nf}_k$; nodul final al laturii *k*
$Gn_{ii} = Gn_{ii} + 1/R_k$
$Gn_{jj} = Gn_{jj} + 1/R_k$
$Gn_{ij} = Gn_{ij} - 1/R_k$
$Gn_{ji} = Gn_{ji} - 1/R_k$
$jn_i = jn_i - e_k/R_k$
$jn_j = jn_j + e_k/R_k$
•
retur

Notes

Preprocesare

Observaţii:

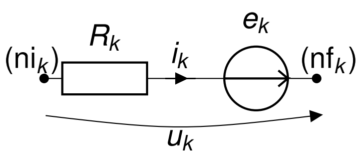
- am folosit pseudocod simplificat pentru a scrie anularea componentelor
  Atenţie! varianta

  pentru i = 1,N
      pentru j = 1,N
          $Gn_{ij} = 0$
      •
  •

  scrisă pentru "instrucţiunea" $\mathbf{Gn} = \mathbf{0}$ va umple complet matricea **Gn**.
- pentru a evita repetarea unor calcule, se pot memora valorile $1/R_k$ şi e_k/R_k.

Notes

Preprocesare - varianta a II-a



procedură nodalRE_v2 (circuit, *Gn*, *jn*)
....
; anulează componentele:
$\mathbf{A} = \mathbf{0}$; matricei incidenţe laturi noduri
$\mathbf{G} = \mathbf{0}$; matricei diagonale $\mathbf{R}^{-1}$
; asamblează sistem
pentru $k = 1, L$; parcurge laturi
    $i = \mathrm{ni}_k$; nodul iniţial al laturii k
    $j = \mathrm{nf}_k$; nodul final al laturii k
    $A_{ik} = -1$
    $A_{jk} = +1$
    $\mathrm{G}_{kk} = 1/R_k$
•
$\mathbf{Gn} = \mathbf{A} * \mathbf{G} * \mathbf{A}^T$; apel proceduri speciale pentru matrice rare
$\mathbf{jn} = -\mathbf{A} * \mathbf{G} * \mathbf{e}$
retur

Notes

Rezolvare

- Sistemul asamblat are dimensiunea $N \times N$, nodul de referintă nefiind tratat special.
- Sistemul de rezolvat trebuie să aibă dimensiunea $N - 1$.
- După rezolvare trebuie adaugată o componentă în plus vectorului potenţialelor: $v_N = 0$.

Exemplu:

Gauss $(N - 1, G, t, v)$
$v_N = 0$

Q2: Cum implementaţi această idee în Matlab/Octave ?

Notes

Introducere
Analiza în c.c.
Analiza în c.a.
Formularea problemei
Metoda nodală clasică
MNA

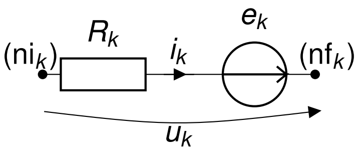
Rezolvare

Metode posibile de rezolvare:

- directe (Gauss, factorizare) - nu introduc erori de trunchiere, dar matricele se umple în cursul algoritmului;
- iterative (Jacobi, Gauss-Seidel, SOR) - matricele îşi păstrează gradul de raritate, dar apar erori de trunchiere şi eventuale probleme de convergenţă;
- semiiterative (gradienţi conjugaţi, GMRES, etc) - avantajoase dacă matricea sistemului este simetrică şi pozitiv definită (dacă nu există surse comandate).

Notes

Postprocesare



<u>procedură</u> postprocesare_circuitRE (circuit, v)
...
Pc = 0 ; puterea consumată
Pg = 0 ; puterea generată
<u>pentru</u> $k = 1, L$; parcurge laturi
  $u = v_{ni_k} - v_{nf_k}$; tensiunea laturii
  $c = (u + e_k)/R_k$; curentul prin latură
  <u>scrie</u> "Latura" k "are tensiunea" u "şi curentul" c
  Pc = Pc + $R_k c^2$; adaugă contribuţia laturii la Pc
  Pg = Pg + $e_k c$; adaugă contribuţia laturii la Pg
•
<u>scrie</u> Pc, Pg
<u>retur</u>

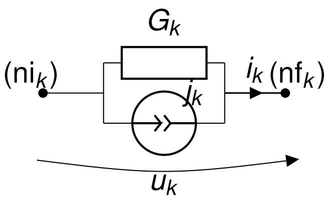
Q3: Cum implementaţi postprocesarea în Matlab/Octave folosind operaţii cu matrice?

Notes

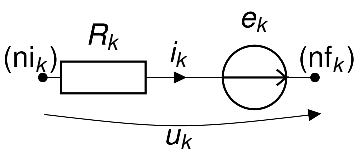
Introducere
Analiza în c.c.
Analiza în c.a.
Formularea problemei
Metoda nodală clasică
MNA

Tratarea surselor reale de curent

Sursele reale de curent (SRC)



$G_k \neq 0$ se pot echivala în laturi de tip SRT



$R_k = 1/G_k$ şi $e_k = j_k/G_k$ Algoritmul se extinde f. uşor.

Notes

Tratarea surselor reale de curent

În general, dacă laturile sunt de tip SRT sau SRC:

$$\begin{cases} \mathbf{Ai} &= \mathbf{0} \\ \mathbf{u} &= \mathbf{A}^T\mathbf{v} \\ \mathbf{i} &= \mathcal{Y}\mathbf{u} + \mathbf{j} \end{cases} \Rightarrow \quad \mathbf{A}(\mathcal{Y}\mathbf{u} + \mathbf{j}) = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A}\mathcal{Y}\mathbf{A}^T\mathbf{v} = -\mathbf{Aj}. \tag{18}$$

SRC: $\mathcal{Y}_k = G_k$. SRT: $\mathcal{Y}_k = 1/R_k$. $j_k = e_k/R_k$

$$\mathcal{Y}_\mathbf{n} = \mathbf{A}\mathcal{Y}\mathbf{A}^T \tag{19}$$

este operatorul matriceal al admitanţelor nodale.

$$\mathbf{j_n} = -\mathbf{Aj} \tag{20}$$

este vectorul termenilor liberi ("injecţii de curent în noduri").

$$\mathcal{Y}_\mathbf{n}\mathbf{v} = \mathbf{j_n}. \tag{21}$$

Notes

Tratarea surselor de curent comandate în tensiune

Metoda nodală = metoda în care necunoscutele sunt numai potenţialele nodurilor.

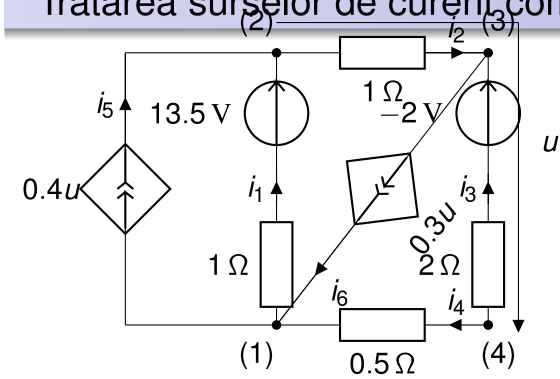
- Metoda nodală permite şi tratarea SICU.
- Matricea îşi pierde proprietăţile de simetrie (şi deci pozitiv definirea).

Structurile de date trebuie adaptate.

- SRC e caracterizată de
  - G_k (conductanţa laturii);
  - j_k (curentul electromotor).
- SICU e caracterizată de
  - γ_k (conductanţă de transfer);
  - nci_k, ncf_k (noduri care indică tensiunea de comandă).

Notes

Tratarea surselor de curent comandate în tensiune



k	tip	ni_k	nf_k	G_k [S]	j_k [A]	γ_k [S]	nci_k	ncf_k
1	SRC	1	2	1	13.5	-	-	-
2	SRC	2	3	1	0	-	-	-
3	SRC	4	3	0.5	−1	-	-	-
4	SRC	4	1	2	0	-	-	-
5	SICU	1	2	-	-	0.4	2	4
6	SICU	3	1	-	-	0.3	2	4

Notes

Tratarea surselor de curent comandate în tensiune

Vom pp. numerotarea laturilor începând cu SRC.

$$\mathbf{i} = \begin{bmatrix} \mathbf{i}_{\rm src} \\ \mathbf{i}_{\rm sicu} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{\rm src} \\ \mathbf{u}_{\rm sicu} \end{bmatrix}. \qquad (22)$$

Relaţiile ce descriu starea circuitului:

$$\begin{cases} \mathbf{A}_{\rm src}\mathbf{i}_{\rm src} + \mathbf{A}_{\rm sicu}\mathbf{i}_{\rm sicu} = \mathbf{0} \\ \mathbf{u}_{\rm src} = \mathbf{A}_{\rm src}^T\mathbf{v} \\ \mathbf{u}_{\rm sicu} = \mathbf{A}_{\rm sicu}^T\mathbf{v} \\ \mathbf{i}_{\rm src} = \mathbf{G}_{\rm src}\mathbf{u}_{\rm src} + \mathbf{j}_{\rm src} \\ \mathbf{i}_{\rm sicu} = \gamma\mathbf{S}_{\rm sicu}\mathbf{v} \end{cases} \Rightarrow \quad \mathbf{A}_{\rm src}(\mathbf{G}_{\rm src}\mathbf{u}_{\rm src}+\mathbf{j}_{\rm src})+\mathbf{A}_{\rm sicu}\gamma\mathbf{S}_{\rm sicu}\mathbf{v} = \mathbf{0},$$

unde $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{\rm src} & \mathbf{A}_{\rm sicu} \end{bmatrix}$. Ecuaţia de rezolvat:

$$(\mathbf{A}_{\rm src}\mathbf{G}_{\rm src}\mathbf{A}_{\rm src}^T + \mathbf{A}_{\rm sicu}\gamma\mathbf{S}_{\rm sicu})\mathbf{v} = -\mathbf{A}_{\rm src}\mathbf{j}_{\rm src}, \qquad (23)$$

Notes

Tratarea surselor de curent comandate în tensiune

Pentru exemplul considerat:

$$\mathbf{A}_{\text{src}} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & +1 \end{array}\right] \end{array}, \quad \mathbf{A}_{\text{sicu}} = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \left[\begin{array}{cc} 1 & -1 \\ -1 & 0 \\ 0 & +1 \\ 0 & 0 \end{array}\right],$$

$$\mathbf{G}_{\text{src}} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc} +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +2 \end{array}\right] \end{array}, \quad \gamma = \begin{array}{c} 5 \\ 6 \end{array} \left[\begin{array}{cc} 0.4 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{array}\right],$$

Notes

Tratarea surselor de curent comandate în tensiune

Pentru exemplul considerat:

$$\mathbf{S}_{\text{sicu}} = \begin{array}{c} 5 \\ 6 \end{array} \left[\begin{array}{cccc} 0 & +1 & 0 & -1 \\ 0 & +1 & 0 & -1 \end{array}\right], \quad \mathbf{j}_{\text{src}} = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \left[\begin{array}{c} 13.5 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{array}\right],$$

unde cifrele mici indică indicii corespunzători de laturi (cu albastru) sau de noduri (cu roşu).

Notes

Tratarea surselor de curent comandate în tensiune

Varianta "algoritmului cu ştampile" - laturile SRC (contribuţii similare ca la SRT)

- ştampila laturii k de tip SRC la $\mathcal{Y}_\mathbf{n}$ este de tip AGA^T

$$\begin{array}{c} \\ \mathrm{ni}_k \\ \mathrm{nf}_k \end{array} \begin{array}{c} k \\ \left[\begin{array}{c} +1 \\ -1 \end{array}\right] \end{array} G_k \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \mathrm{ni}_k & \mathrm{nf}_k \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc} +1 & -1 \end{array}\right] \end{array} = \begin{array}{c} \\ \mathrm{ni}_k \\ \mathrm{nf}_k \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \mathrm{ni}_k & \mathrm{nf}_k \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc} +G_k & -G_k \\ -G_k & +G_k \end{array}\right] \end{array},$$

- ştampila laturii k de tip SRC la vectorul $\mathbf{j_n}$ este de tip $-Aj$

$$\begin{array}{c} \\ \mathrm{ni}_k \\ \mathrm{nf}_k \end{array} \begin{array}{c} k \\ \left[\begin{array}{c} +1 \\ -1 \end{array}\right] \end{array} j_k = \begin{array}{c} \\ \mathrm{ni}_k \\ \mathrm{nf}_k \end{array} \begin{array}{c} k \\ \left[\begin{array}{c} -j_k \\ +j_k \end{array}\right] \end{array}. \qquad (24)$$

Notes

Tratarea surselor de curent comandate în tensiune

Ştampila laturii k, de tip SICU, având:

- ni_k şi nf_k (noduri considerate pentru latura de ieşire, cea corespunzătoare sursei de curent - mărimea comandată),
- conductanţa de transfer γ_k şi
- nodurile ce indică tensiunea de comandă: nci_k şi ncf_k

este de tip $A\gamma S$ adică

$$\begin{array}{c} \\ \mathrm{ni}_k \\ \mathrm{nf}_k \end{array} \begin{array}{c} k \\ \left[\begin{array}{c} +1 \\ -1 \end{array}\right] \end{array} \gamma_k \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \mathrm{nci}_k & \mathrm{ncf}_k \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc} +1 & -1 \end{array}\right] \end{array} = \begin{array}{c} \\ \mathrm{ni}_k \\ \mathrm{nf}_k \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \mathrm{nci}_k & \mathrm{ncf}_k \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc} +\gamma_k & -\gamma_k \\ -\gamma_k & +\gamma_k \end{array}\right] \end{array}, \qquad (25)$$

şi se aplică doar matricei coeficienţilor.
SICU nu contribuie la vectorul termenilor liberi.

Notes

Tratarea surselor de curent comandate în tensiune

Pentru exemplul simplu considerat:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} +1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\text{Ştampila laturii 1}} \quad \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\text{Ştampila laturii 2}} \quad \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0.3 & 0 & -0.3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.3 & 0 & 0.3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\text{Ştampila laturii 6}}.$$

Notes

Concluzii - Metoda nodală clasică

1. Poate fi aplicată doar în circuitele în care toate laturile sunt controlabile în tensiune.
2. Necunoscutele sunt numai potenţialele nodurilor.
3. Sistemul de rezolvat este de tipul
$$\mathbf{Y_n v} = \mathbf{j_n} \tag{26}$$
4. Dacă circuitul este reciproc (nu conţine surse comandate) atunci $\mathbf{Y_n}$ este simetrică şi pozitiv definită.
5. Algoritmul poate fi conceput folosind operaţii eficiente cu matrice, caz în care este utilă scrierea detaliată ca:
$$(\mathbf{A}_{\mathrm{src}}\mathbf{G}_{\mathrm{src}}\mathbf{A}_{\mathrm{src}}^T + \mathbf{A}_{\mathrm{sicu}}\gamma\mathbf{S}_{\mathrm{sicu}})\mathbf{v} = -\mathbf{A}_{\mathrm{src}}\mathbf{j}_{\mathrm{src}}. \tag{27}$$
6. Algoritmul poate fi conceput şi prin parcurgerea laturilor şi adăugarea contribuţiilor la sistem, caz în care este utilă stabilirea ştampilelor fiecărei laturi:

Notes

Concluzii - Metoda nodală clasică

	SRC	SICU	SRT	R
$\mathbf{Y}_n$	$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \mathrm{ni}_k & \mathrm{nf}_k \end{array} \\ \begin{array}{c} \mathrm{ni}_k \\ \mathrm{nf}_k \end{array} & \begin{bmatrix} +G_k & -G_k \\ -G_k & +G_k \end{bmatrix} \end{array}$	$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \mathrm{nci}_k & \mathrm{ncf}_k \end{array} \\ \begin{array}{c} \mathrm{ni}_k \\ \mathrm{nf}_k \end{array} & \begin{bmatrix} +\gamma_k & -\gamma_k \\ -\gamma_k & +\gamma_k \end{bmatrix} \end{array}$	$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \mathrm{ni}_k & \mathrm{nf}_k \end{array} \\ \begin{array}{c} \mathrm{ni}_k \\ \mathrm{nf}_k \end{array} & \begin{bmatrix} +\frac{1}{R_k} & -\frac{1}{R_k} \\ -\frac{1}{R_k} & +\frac{1}{R_k} \end{bmatrix} \end{array}$	$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \mathrm{ni}_k & \mathrm{nf}_k \end{array} \\ \begin{array}{c} \mathrm{ni}_k \\ \mathrm{nf}_k \end{array} & \begin{bmatrix} +\frac{1}{R_k} & -\frac{1}{R_k} \\ -\frac{1}{R_k} & +\frac{1}{R_k} \end{bmatrix} \end{array}$
$\mathbf{j}_n$	$\begin{array}{cc} \begin{array}{c} \mathrm{ni}_k \\ \mathrm{nf}_k \end{array} & \begin{bmatrix} -j_k \\ +j_k \end{bmatrix} \end{array}$	Nu contribuie	$\begin{array}{cc} \begin{array}{c} \mathrm{ni}_k \\ \mathrm{nf}_k \end{array} & \begin{bmatrix} -\frac{e_k}{R_k} \\ +\frac{e_k}{R_k} \end{bmatrix} \end{array}$	Nu contribuie

Notes

Metoda nodală modificată (*Modified Nodal Analysis)*

1. Se aplică analizei circuitelor care conţin elemente incompatibile cu tehnica nodală clasică (elemente controlate în curent):
   - surse independente de tensiune (SIT);
   - surse de tensiune comandate (SUCU, SUCI);
   - surse de curent comandate în curent (SICI).
2. Sistemul asamblat este extins faţă de varianta clasică.
3. Necunoscutele metodei nu sunt numai potenţialele nodurilor.

Notes

Metoda nodală modificată (*Modified Nodal Analysis*)

Necunoscutele: $\mathbf{i_m}$

- curenţii din sursele ideale de tensiune (SIT);
- curenţii porţilor de ieşire la SUCU;
- curenţii porţilor de ieşire la SUCI;

Ecuaţiile MNA au forma:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Y_n} & \mathbf{B_m} \\ \mathbf{A_m} & \mathbf{Z_m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{i_m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{j_n} \\ \mathbf{e_m} \end{bmatrix} \tag{28}$$

Notes

Metoda nodală modificată (*Modified Nodal Analysis*)

	SIT	SUCU	SUCI	SICI
$\mathbf{A_m}$	$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} ni_k & nf_k \end{array} \\ k & \left[\begin{array}{cc} +1 & -1 \end{array}\right] \end{array}$	$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} ni_k & nf_k & nci_j & ncf_j \end{array} \\ k & \left[\begin{array}{cccc} +1 & -1 & -\alpha_k & +\alpha_k \end{array}\right] \end{array}$	$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} ni_k & nf_k \end{array} \\ k & \left[\begin{array}{cc} +1 & -1 \end{array}\right] \end{array}$	Nu contribuie
$\mathbf{B_m}$	$\begin{array}{cc} & k \\ \begin{array}{c} ni_k \\ nf_k \end{array} & \left[\begin{array}{c} +1 \\ -1 \end{array}\right] \end{array}$	$\begin{array}{cc} & k \\ \begin{array}{c} ni_k \\ nf_k \end{array} & \left[\begin{array}{c} +1 \\ -1 \end{array}\right] \end{array}$	$\begin{array}{cc} & k \\ \begin{array}{c} ni_k \\ nf_k \end{array} & \left[\begin{array}{c} +1 \\ -1 \end{array}\right] \end{array}$	$\begin{array}{cc} & idx_{sit} \\ \begin{array}{c} ni_k \\ nf_k \end{array} & \left[\begin{array}{c} +\beta_k \\ -\beta_k \end{array}\right] \end{array}$
$\mathbf{Z_m}$	Nu contribuie	Nu contribuie	$\begin{array}{cc} & idx_{sit} \\ idx_{suci} & \left[\begin{array}{c} -\rho_k \end{array}\right] \end{array}$	Nu contribuie
$\mathbf{e_m}$	$\begin{array}{cc} idx_{sit} & \left[\begin{array}{c} +e_k \end{array}\right] \end{array}$	Nu contribuie	Nu contribuie	Nu contribuie
$\mathbf{j_n}$	$\begin{array}{cc} idx_{sit} & \left[\begin{array}{c} i_k \end{array}\right] \end{array}$	$\begin{array}{cc} idx_{sucu} & \left[\begin{array}{c} i_k \end{array}\right] \end{array}$	$\begin{array}{cc} idx_{suci} & \left[\begin{array}{c} i_k \end{array}\right] \end{array}$	Nu contribuie

Notes

Varianta a 2-a: Asamblarea blocurilor de matrice

Exemplu - cazul cu SRC, SIT şi SUCU.

- Kirchhoff I:

$$\mathbf{A}_{\text{src}}\mathbf{i}_{\text{src}} + \mathbf{A}_{\text{sit}}\mathbf{i}_{\text{sit}} + \mathbf{A}_{\text{sucu}}\mathbf{i}_{\text{sucu}} = \mathbf{0}, \tag{29}$$

- Kirchhoff II:

$$\mathbf{u}_{\text{src}} = \mathbf{A}_{\text{src}}^T\mathbf{v}, \tag{30}$$

$$\mathbf{u}_{\text{sit}} = \mathbf{A}_{\text{sit}}^T\mathbf{v}, \tag{31}$$

$$\mathbf{u}_{\text{sucu}} = \mathbf{A}_{\text{sucu}}^T\mathbf{v}, \tag{32}$$

- relaţii constitutive:

$$\mathbf{i}_{\text{src}} = \mathbf{G}_{\text{src}}\mathbf{u}_{\text{src}} + \mathbf{j}_{\text{src}} \tag{33}$$

$$\mathbf{u}_{\text{sit}} = -\mathbf{e}_{\text{sit}}, \tag{34}$$

$$\mathbf{u}_{\text{sucu}} = \alpha\mathbf{S}_{\text{sucu}}\mathbf{v}, \tag{35}$$

care determină tensiunea de comandă.

Notes

Varianta a 2-a: Asamblarea blocurilor de matrice

$N - 1 + L_E + L_{\text{sucu}}$ necunoscute:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{i}_{\text{sit}} \\ \mathbf{i}_{\text{sucu}} \end{bmatrix}. \tag{36}$$

$$\mathbf{M}\mathbf{x} = \mathbf{p} \tag{37}$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{\text{src}}\mathbf{G}_{\text{src}}\mathbf{A}_{\text{src}}^T & \mathbf{A}_{\text{sit}} & \mathbf{A}_{\text{sucu}} \\ \mathbf{A}_{\text{sit}}^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_{\text{sucu}}^T - \alpha\mathbf{S}_{\text{sucu}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \tag{38}$$

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} -\mathbf{A}_{\text{src}}\mathbf{j}_{\text{src}} \\ -\mathbf{e}_{\text{sit}} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}. \tag{39}$$

Notes

Formularea problemei

Conţin:

- rezistoare liniare (R);
- bobine liniare (L);
- bobine liniare cuplate (M);
- condensatoare liniare (C);
- surse ideale de tensiune (SIT);
- surse ideale de curent (SIC);
- surse comandate liniar (SUCU, SUCI, SICU, SUCI).

SIT sau SIC au variaţii de forma:

$$y(t) = Y\sqrt{2}\sin(\omega t + \varphi). \tag{40}$$

unde ω are aceeaşi valoare pentru toate mărimile.

Notes

Formularea problemei

Problema fundamentală a analizei circuitelor de c.a.

Se dau:

- topologia circuitului (schemă/tabel de descriere (netlist)/matrice de incidenţă sau apartenenţă);
- valorile parametrilor (rezistenţele, bobinele, cuplajele, condensatoarele, valorile surselor: frecvenţă, valorile efective, fazele iniţiale).

Se cer:

- curenţii şi tensiunile din fiecare latură (valori efective, faze iniţiale);
- puteri (active, reactive, aparente, defazaje).

Notes

Similitudinea cu c.c.

- Metoda de analiză se bazează pe reprezentarea în complex.

$$y(t) = Y\sqrt{2}\sin(\omega t + \varphi) \quad \rightleftharpoons \quad \underline{Y} = Y e^{j\varphi}. \qquad (41)$$

- Ideea: ecuaţiile similare:

	Circuitul de c.c.	Circuitul de c.a.
TK1	$\sum_{k\in(n)}^{(A)} i_k = 0$	$\sum_{k\in(n)}^{(A)} \underline{I}_k = 0$
TK2	$\sum_{k\in[b]}^{(A)} u_k = 0$	$\sum_{k\in[b]}^{(A)} \underline{U}_k = 0$
SRT	$u_k = R_k i_k - e_k$	$\underline{U}_k = \underline{Z}_k \underline{I}_k - \underline{E}_k$
SRC	$i_k = G_k u_k + j_k$	$\underline{I}_k = \underline{Y}_k \underline{U}_k + \underline{J}_k$
SUCI	$e_k = r_{km} i_m$	$\underline{E}_k = \underline{z}_{km} \underline{I}_m$
SICU	$j_k = g_{km} u_m$	$\underline{J}_k = \underline{y}_{km} \underline{U}_m$
SUCU	$e_k = \alpha_{km} u_m$	$\underline{E}_k = \underline{\alpha}_{km} \underline{U}_m$
SICI	$j_k = \beta_{km} i_m$	$\underline{J}_k = \underline{\beta}_{km} \underline{I}_m$

Notes

Reprezentarea în complex a elementelor ideale

	Rezistor (R)	Bobină (L)	Condensator (C)
Impedanţa complexă $\underline{Z}$	R	$j\omega L$	$1/(j\omega C)$
Admitanţa complexă: $\underline{Y}$	$1/R$	$1/(j\omega L)$	$j\omega C$
Defazajul: φ	0	$\pi/2$	$-\pi/2$
Impedanţa: Z	R	ωL	$1/(\omega C)$
Admitanţa: Y	$1/R$	$1/(\omega L)$	ωC
Rezistenţă de c.a.: R	R	0	0
Reactanţa: X	0	ωL	$-1/(\omega C)$
Conductanţa de c.a.: G	$1/R$	0	0
Susceptanţa: B	0	$-1/(\omega L)$	ωC

Notes

Algoritm

Similar cu cel din c.c.:

- în loc de rezistenţe se lucrează cu impedanţ complexe;
- parametrii surselor sunt tot valori constante, dar complexe, obţinute din reprezentarea în complex a variaţiilor care se dau.

Diferenţe faţă de algoritmul din c.c.:

- în etapa de preprocesare: citirea datelor de descriere şi reprezentarea lor în complex;
- în etapa de asamblare, apar în plus bobinele cuplate, care contribuie la sistem cu următoarele ştampile:

Notes

Algoritm

	Cuplaje
$\mathbf{A_m}$	$\begin{array}{cccc} \mathrm{ni}_j & \mathrm{nf}_j & \mathrm{ni}_k & \mathrm{nf}_k \\ \end{array}$ $\left[\begin{array}{cccc} +1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & -1 \end{array}\right]$
$\mathbf{B_m}$	$\begin{array}{c\|cc} & j & k \\ \hline \mathrm{ni}_j & +1 & 0 \\ \mathrm{nf}_j & -1 & 0 \\ \mathrm{ni}_k & 0 & +1 \\ \mathrm{nf}_k & 0 & -1 \end{array}$
$\mathbf{Z_m}$	$\begin{array}{c\|cc} & j & k \\ \hline j & -j\omega L_{jj} & -j\omega L_{jk} \\ k & -j\omega L_{kj} & -j\omega L_{kk} \end{array}$
$\mathbf{e_m}$	Nu contribuie
$\mathbf{j_n}$	$\left[\begin{array}{c} i_j \\ i_k \end{array}\right]$

Notes

Caracteristici de frecvenţă

În multe aplicaţii practice interesează reprezentarea caracteristicilor de frecvenţă: comportarea semnalelor de ieşire pentru un interval al frecvenţelor semnalelor.
Variante de implementare:

1. Se lucrează simbolic, cu parametrul ω şi se obţin expresii simbolice ale mărimilor de ieşire care apoi se evaluează numeric;
2. Se lucrează numeric, pentru frecvenţe din intervalul de interes se rezolvă mai multe probleme de c.a.

Notes

Referinţe

- [Ciuprina13a] Gabriela Ciuprina - Algoritmi numerici pentru calcule ştiinţifice în ingineria electrică , Editura MatrixROM, 2013, pag. 121-141

  disponibilă la http://www.lmn.pub.ro/∼gabriela/books/AlgNr_MatrixRom2013.pdf
- [Ioan12] Daniel Ioan, Teoremele fundamentale ale circuitelor electrice, Notiţe de curs

  disponibile online *http://www.lmn.pub.ro/∼daniel/BazeELTH-6-Teoremele circuitelor.pdf* 2012.
- [Chua75] L.O. Chua and P.M. Lin, *Computer-aided analysis of electronic circuits: algorithms and computational techniques*, Prentice-Hall. 1975.

Notes

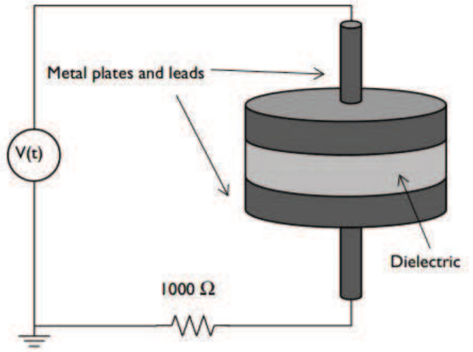
Simulatoare de circuit

Free and Open Source
NgSpice (are si varianta online), GnuCap, CircuitLogix, LTSpice, MultiSim, TopSpice, MacSpice, Xyce (open source, SPICE-compatible, high-performance analog circuit simulator)
Licensed/Paid Circuit simulation software
Spectre (Cadence), PSpice, MultiSim, SiMetrix, TINA
Vedeţi şi
http://www.circuitstoday.com/circuit-design-and-simulation-softwares
https://en.wikipedia.org/wiki/Electronic_circuit_simulation

Notes

Simulatoare de circuit incluse în programe de câmp

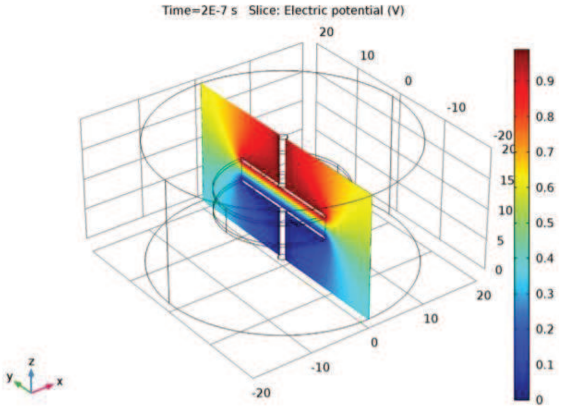
COMSOL - pentru probleme cuplate.



Notes

Simulatoare de circuit incluse în programe de câmp

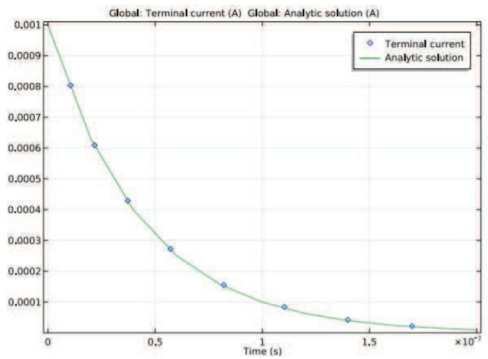
COMSOL - pentru probleme cuplate.



Notes

Simulatoare de circuit incluse în programe de câmp

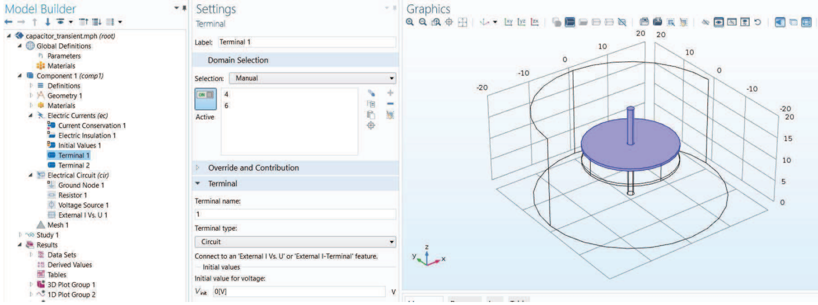
COMSOL - pentru probleme cuplate.



Notes

Simulatoare de circuit incluse în programe de câmp

COMSOL - pentru probleme cuplate.

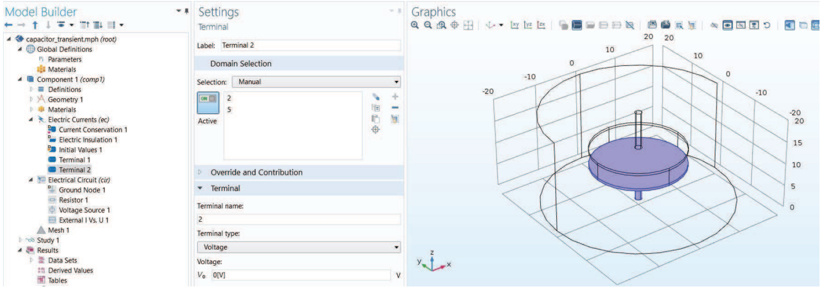


Notes

Introducere
Analiza în c.c.
Analiza în c.a.
Formularea problemei
Similitudinea cu c.c.
Caracteristici de frecvenţă

Simulatoare de circuit incluse în programe de câmp

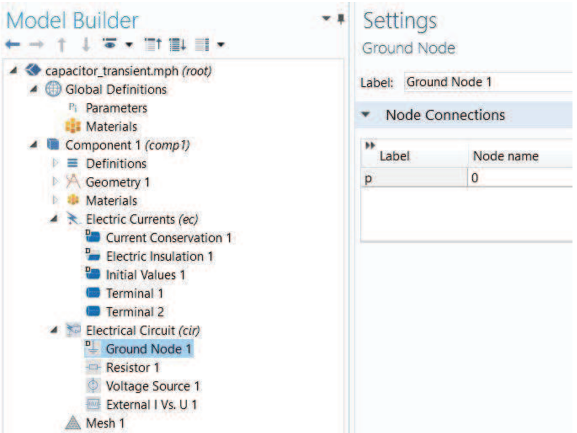
COMSOL - pentru probleme cuplate.



Notes

Simulatoare de circuit incluse în programe de câmp

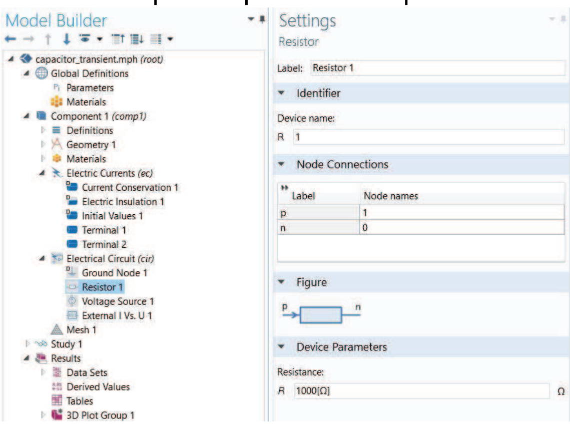
COMSOL - pentru probleme cuplate.



Notes

Simulatoare de circuit incluse în programe de câmp

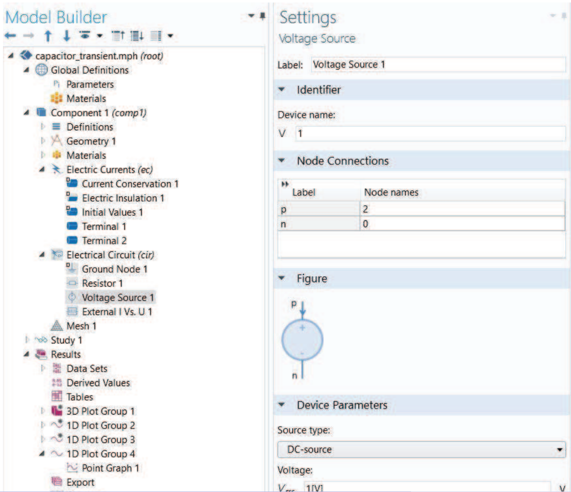
COMSOL - pentru probleme cuplate.



Notes

Simulatoare de circuit incluse în programe de câmp

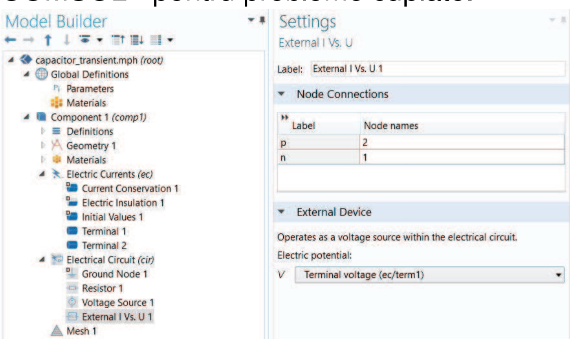
COMSOL - pentru probleme cuplate.



Notes

Simulatoare de circuit incluse în programe de câmp

COMSOL - pentru probleme cuplate.



Notes